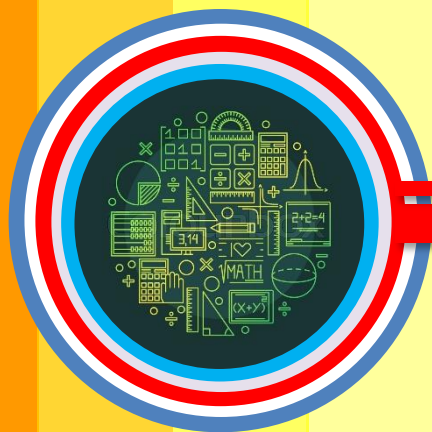




NGUYỄN CÔNG ĐỊNH

CHINH PHỤC ĐIỂM

8-9-10

Chuyên đề

HÀM SỐ

- ♦ Phân loại các dạng toán
- ♦ Bài tập khó và đa dạng
- ♦ Lời giải chi tiết

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO



CHỦ ĐỀ: HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 1

1.1. XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU BẰNG BBT – ĐỒ THỊ

NỘI DUNG CẦN NẮM VỮNG

Bài toán bổ trợ 1: Cho đồ thị hàm số $f(x)$ hoặc bảng biến thiên hàm số $f(x)$. Tìm nghiệm phương trình $f[u(x)] = 0$.

Phương pháp :

+ Dựa vào đồ thị (hoặc BBT) của hàm số $f(x)$ để tìm các nghiệm $x = x_i$ của phương trình $f(x) = 0$.

+ Khi đó phương trình $f[u(x)] = 0 \Leftrightarrow u(x) = x_i$. Giải các phương trình $u(x) = x_i$ ta tìm được các nghiệm của phương trình $f[u(x)] = 0$.

Nhận xét : Đôi khi chỉ tìm ra được các nghiệm gần đúng x_i hoặc chỉ tìm ra được số nghiệm của phương trình $f[u(x)] = 0$.

N.C.Đ

Bài toán bổ trợ 2: Cho đồ thị hàm số $f(x)$ hoặc bảng biến thiên hàm số $f(x)$. Tìm nghiệm phương trình $f[u(x)] + p(x) = 0$.

Phương pháp :

+ Đặt $t = u(x)$, biểu diễn $p(x) = \varphi(t)$.

+ Biến đổi phương trình $f[u(x)] + p(x) = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\varphi(t)$

+ Dựa vào đồ thị (hoặc BBT) của hàm số $f(x)$ để tìm các nghiệm $x = x_i$ từ phương trình $f(x) = -\varphi(x)$.

+ Khi đó phương trình $f[u(x)] + p(x) = 0 \Leftrightarrow t = u(x) = x_i$. Giải các phương trình $u(x) = x_i$ ta tìm được các nghiệm của phương trình $f[u(x)] = 0$.

Nhận xét : Bài toán bổ trợ 1 là trường hợp đặc biệt của bài toán bổ trợ 2.

Bài toán 1: Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ hoặc bảng biến thiên hàm số $f'(x)$. Xét tính đơn điệu hàm số $y = f[u(x)]$.

Phương pháp :

+ Xác định $y' = u'(x) \cdot f'[u(x)]$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 0 \\ f'[u(x)] = 0 \end{cases}$



(Dựa vào bài toán toán bổ trợ 1 để tìm các nghiệm phương trình $y' = 0$).

+ Lập bảng xét dấu của y' .

+ Từ đó kết luận được về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f[u(x)]$ và có thể phát triển bài toán thành tìm số cực đại, cực tiểu của hàm số.

Bài toán 2: Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ hoặc bảng biến thiên hàm số $f'(x)$. Xét tính đơn điệu hàm số $y = f[u(x)] + p(x)$.

Phương pháp :

+ Xác định $y' = u'(x) f'[u(x)] + p'(x)$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 0 \\ f'[u(x)] = -\frac{p'(x)}{u'(x)}, u'(x) \neq 0 \end{cases}$

(Dựa vào bài toán toán bổ trợ 2 để tìm các nghiệm phương trình $y' = 0$).

+ Lập bảng xét dấu của y' .

+ Từ đó kết luận được về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số và có thể phát triển bài toán thành tìm số cực đại, cực tiểu của hàm số.

BÀI TẬP

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	

Hàm số $y = 3f(x) + 2 - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $1; +\infty$. B. $-\infty; -1$. C. $-1; 0$. D. $0; 2$.

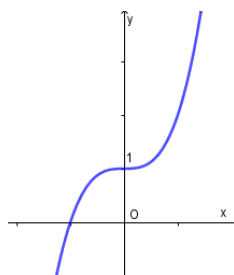
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Hàm số $y = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(-2; 0)$. C. $(-1; 3)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ





Hàm số $y = f(2x) + 2e^{-x}$ nghịch biến trên khoảng nào cho dưới đây?

- A. $(-2; 0)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(-1; 1)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+

Hàm số $y = -2f(x) + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(-4; 2)$. B. $(-1; 2)$. C. $(-2; -1)$. D. $(2; 4)$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



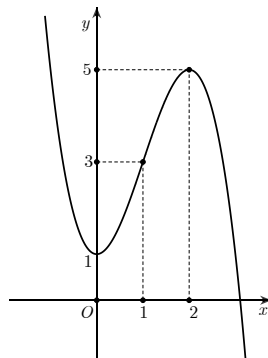
Hàm số $g(x) = \ln(f(x))$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-1; 1)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1) = f(3) = 0$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình dưới đây. Hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(-2; 2)$. B. $(0; 4)$. C. $(-2; 1)$. D. $(1; 2)$.

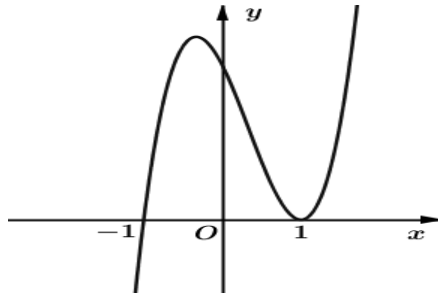
Câu 7. Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4, có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(5 - 2x + 4x^2 - 10x)$ đồng biến trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?





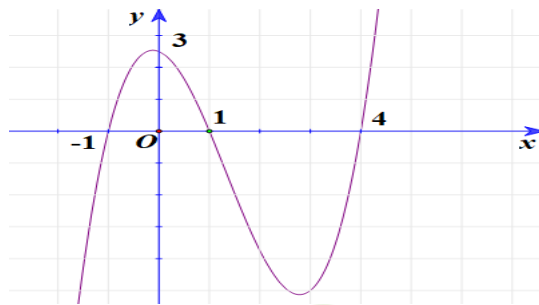
- A. $3; 4$. B. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$. C. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. D. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 8. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(x^2 + x - 1)$ đồng biến trên khoảng



- A. $(0; 1)$. B. $(-2; -1)$. C. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$. D. $(-\infty; -2)$.

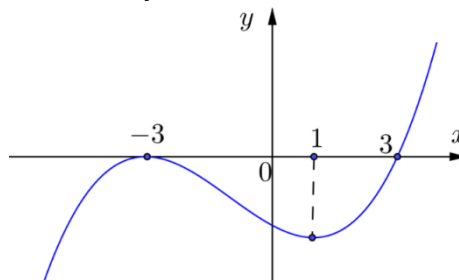
Câu 9. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y = f(|3 - x|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

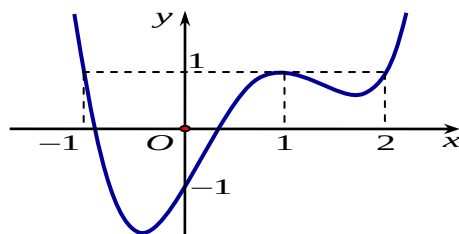
- A. $(4; 6)$. B. $(-1; 2)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(2; 3)$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-\infty; 3)$. B. $(1; 3)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-3; 1)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x-1) + \frac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?





- A. $(2; 3)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(1; 2)$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-

Hàm số $y = f(x-1) + x^3 - 12x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(1; 2)$ C. $(-\infty; 1)$. D. $(3; 4)$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	-	0	+	0	-	

Hàm số $y = f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$. D. $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

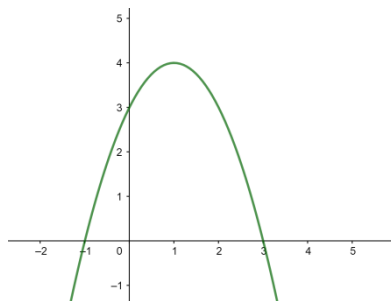
Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	-	0	+	0	-	

và hàm số $g(x) = f(1-2x)$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

- A. $x = \frac{1}{2}$ là một điểm cực đại và $x = 0$ là một điểm cực tiểu của hàm số $y = g(x)$.
 B. Hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
 C. Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $x = 2$.
 D. $x = -1$ là một điểm cực đại và $x = 2$ là một điểm cực tiểu của hàm số $y = g(x)$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ sau



Hàm số $g(x) = f(2x^4 - 1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

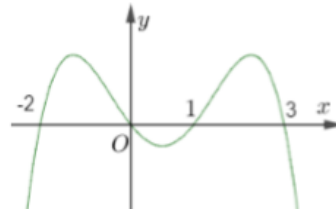
x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	-	0	+	0	-	



Hàm số $y = f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$. D. $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

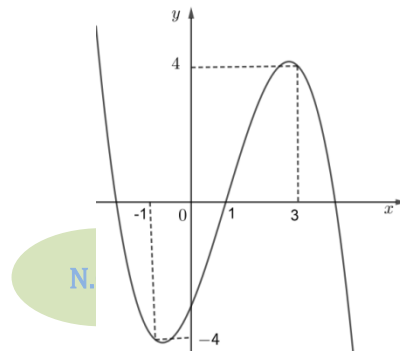
Câu 17. Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Hàm số $y = f(x^2 + 2x + 3)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $(-2; 0)$. D. $(-2; -1)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới.



Hàm số $y = f(x) - x^2 + 2x$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-1; 2)$. B. $(1; 3)$. C. $(0; 1)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x - 2)$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(-1; 1)$. B. $(0; 2)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Hàm số $y = g(x) = f(x^2) + \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} - 6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; -1)$. B. $(1; 2)$. C. $(-4; -3)$. D. $(-6; -5)$.

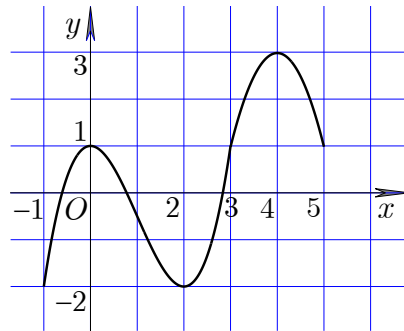
Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		1		-3		$+\infty$

Hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

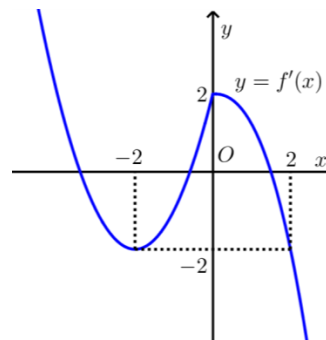
- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(1; 2)$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y = -2f(2-x) + x^2$ nghịch biến trên khoảng



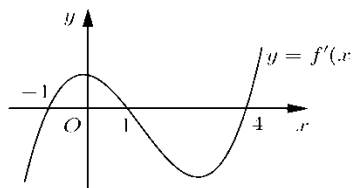
- A. $(-3; -2)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(0; 2)$.

Câu 23. Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(x-1) + x^2 - 2x$ đồng biến trên khoảng



- A. $1; 2$. B. $-1; 0$. C. $0; 1$. D. $-2; -1$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(3-2x) + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



- A. $(1; 2)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(-1; 1)$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Gọi $g(x) = 2f(1-x) + \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
- C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
- D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 3$ và hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-6	6	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$				$+\infty$

Hàm số $y = g(f(x))$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-1; 1)$.
- B. $(0; 2)$.
- N.C. B.C.** $(-2; 0)$.
- D. $(0; 4)$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Đặt $g(x) = f(x^2 - 2x + 2) + x^3 - 3x^2 - 6x$.

Xét các khẳng định

- 1) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.
- 2) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
- 3) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

Số khẳng định đúng trong các khẳng định trên là

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	4	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Có bao nhiêu số nguyên $m \in (0; 2020)$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$?



A. 2018.

B. 2017.

C. 2016.

D. 2015.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-4		-1		2		7		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f(2x+1) + \frac{2}{3}x^3 - 8x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$.B. $(-\infty; -2)$.C. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.D. $(-1; 7)$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		+		0	-		0	+		0	-

Hàm số $y = 3f(-x+2) + x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-2; 1)$.B. $(2; +\infty)$.C. $(0; 2)$.D. $(-\infty; -2)$.

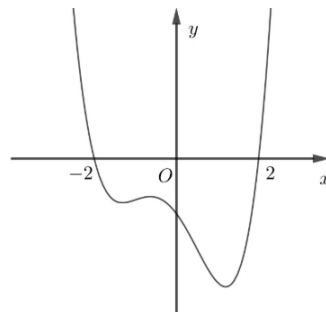
Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		0	$-$		0	$+$		0	$-$

Hàm số $y = 3f(-x+2) + x^3 + 3x^2 - 9x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; 1)$.B. $(-\infty; -2)$.C. $(0; 2)$.D. $(2; +\infty)$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết $f(-2) < 0$, hàm số $y = |f(1-x^{2018})|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\sqrt[2018]{3}; \sqrt[2018]{3})$.B. $(-1; +\infty)$.C. $(-\infty; -\sqrt[2018]{3})$.D. $(-\sqrt[2018]{3}; 0)$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = g(x) = f(x^2) + \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} - 6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

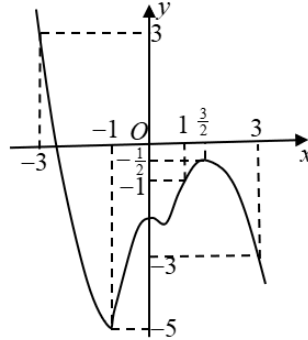
- A. $(-2; -1)$. B. $(1; 2)$. C. $(-6; -5)$. D. $(-4; -3)$.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên. Hàm số $y = e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$

- A. $(1; +\infty)$ B. $(-\infty; -2)$. C. $(-1; 3)$. D. $(-2; 1)$.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng

- A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. B. $(1; 3)$. C. $(-3; 1)$. D. $(-2; 0)$.

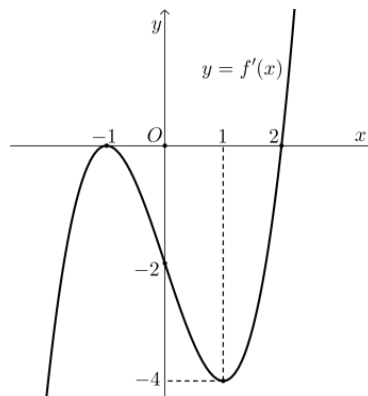
Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-3; -2)$. C. $(0; 1)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; 3)$. B. $(-3; -1)$. C. $(0; 1)$. D. $(4; +\infty)$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	1	2	5	$+\infty$
-----	-----------	------	-----	-----	-----	-----------

$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	+	0	-
---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---

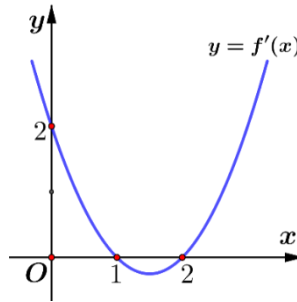
Cho hàm số $y = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$ B. $(-1; 0)$ C. $(0; 2)$ D. $(2; +\infty)$

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$. Hàm số $g(x) = -f(x^2 - 1)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(0; 1)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-1; 0)$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$.



Hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 - 2x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(-4; 2)$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến $\forall x \in (a; b)$. Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(2 - b; 2 - a)$. B. $(-\infty; 2 - a)$. C. $(a; b)$. D. $(2 - b; +\infty)$.



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	+

Hàm số $y = 3f(x) + 2 - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $1; +\infty$. B. $-\infty; -1$. **C. $-1; 0$.** D. $0; 2$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+

Hàm số $y = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 1)$. **B. $(-2; 0)$.** C. $(-1; 3)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

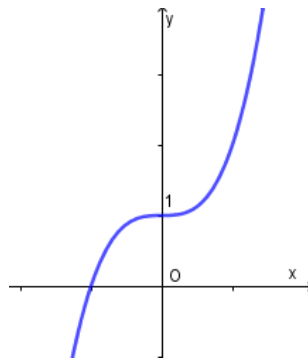
$$y = f(1-x) \Rightarrow y' = -f'(1-x).$$

N.C.Đ

Hàm số $y = f(1-x)$ nghịch biến $\Rightarrow -f'(1-x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 1 \\ -1 \leq 1-x \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Vậy hàm số $y = f(1-x)$ có nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(2x) + 2e^{-x}$ nghịch biến trên khoảng nào cho dưới đây?

- A. $(-2; 0)$.** B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(-1; 1)$.

Lời giải

Chọn A

$$y = f(2x) + 2e^{-x} \Rightarrow y' = 2f'(2x) - 2e^{-x} = 2(f'(2x) - e^{-x})$$



Từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} f'(x) > 1, \forall x > 0 \\ f'(x) = 1, x = 0 \\ f'(x) < 1, \forall x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(2x) > 1, \forall x > 0 \\ f'(2x) = 1, x = 0 \\ f'(2x) < 1, \forall x < 0 \end{cases}$

Mà $\begin{cases} e^{-x} < 1, \forall x > 0 \\ e^{-x} = 1, x = 0 \\ e^{-x} > 1, \forall x < 0 \end{cases}$ Suy ra $\begin{cases} f'(x) - e^{-x} > 0, \forall x > 0 \\ f'(x) - e^{-x} = 0, x = 0 \\ f'(x) - e^{-x} < 0, \forall x < 0 \end{cases}$

Từ đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y			

Vậy hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 0)$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = -2f(x) + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-4; 2)$.

B. $(-1; 2)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(2; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Xét $y = g(x) = -2f(x) + 2019$.

Ta có $g'(x) = (-2f(x) + 2019)' = -2f'(x)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$, ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$			
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Hàm số $g(x) = \ln(f(x))$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$g'(x) = [\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vì vậy dấu của $g'(x)$ là dấu của $f'(x)$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$		N.C.D		$+\infty$

Vậy hàm số $g(x) = \ln(f(x))$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1) = f(3) = 0$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình dưới đây. Hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2; 2)$.

B. $(0; 4)$.

C. $(-2; 1)$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị và giả thiết, ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			0		0		0	

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ $\nearrow$ 0 $\searrow$ $f(1)$ $\nearrow$ 0 $\searrow$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

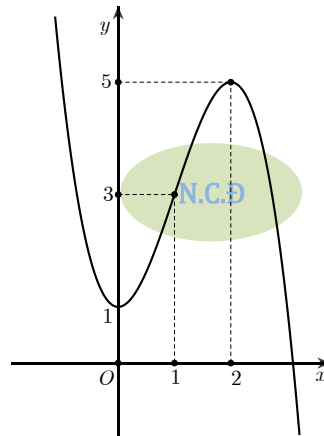
$$y' = \left((f(x))^2 \right)' = 2f(x) \cdot f'(x).$$

Ta có bảng xét dấu của $y' = \left((f(x))^2 \right)'$:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$-$	0	$-$
$2f(x).f'(x)$		$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

Ta được hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến trên $(1; 2)$.

Câu 7. Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4, có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(5 - 2x) + 4x^2 - 10x$ đồng biến trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A. $3; 4$.

B. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

D. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta suy ra $y = f'(x)$ có hai điểm cực trị $A(0; 1), B(2; 5)$.

Ta có $f''(x) = ax(x - 2) = ax^2 - 2ax$, do đó $y = f'(x) = \frac{ax^3}{3} - ax^2 + b$ (1).

Thay tọa độ các điểm A, B vào (1) ta được hệ:
$$\begin{cases} b = 1 \\ \frac{8a}{3} - 4a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -3 \end{cases}.$$

Vậy $f'(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$.

Đặt $g(x) = f(5 - 2x) + 4x^2 - 10x$ hàm có TXĐ $\mathbb{R}$.



Đạo hàm $g'(x) = -2[f'(5-2x) - 4x + 5] = -4(4x^3 - 24x^2 + 43x - 22)$,

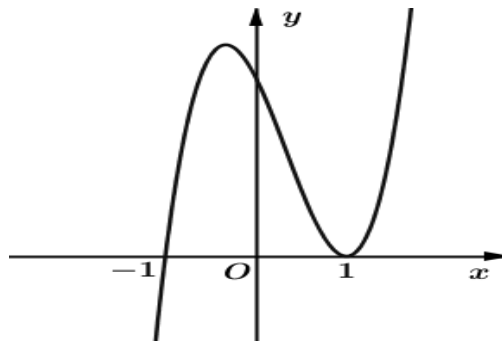
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{4 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$	$\frac{4-\sqrt{5}}{2}$	2	$\frac{4+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+

Từ BBT ta chọn đáp án B.

Câu 8. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(x^2 + x - 1)$ đồng biến trên khoảng



A. $(0; 1)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$.

D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta có: $f'(x) = a(x+1)(x-1)^2$ với $a > 0$

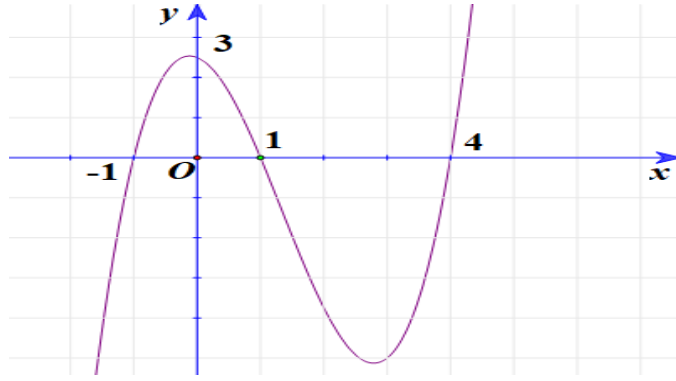
$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x+1)f'(x^2+x-1) = a(2x+1)(x^2+x)(x^2+x-2)^2 \\ &= ax(2x+1)(x+1)(x-1)^2(x+2)^2 \end{aligned}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	-	0	+	0	+
$g(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên chọn A.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y = f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(4;6)$.

B. $(-1;2)$.

C. $(-\infty;-1)$.

D. $(2;3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$y = f(|3-x|) \Rightarrow f'(|3-x|) = -\frac{(3-x)}{|3-x|} f'(|3-x|) (x \neq 3)$$

$$f'(|3-x|) = 0 \Leftrightarrow -\frac{(3-x)}{|3-x|} f'(|3-x|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(|3-x|) = 0 \\ 3-x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |3-x| = -1(L) \\ |3-x| = 1(N) \\ |3-x| = 4(N) \\ x = 3(L) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 7 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

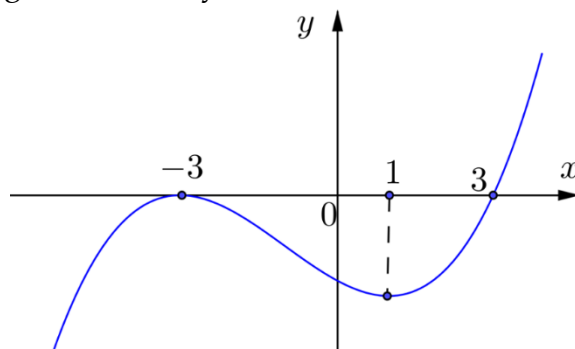
N.C.Đ

Ta có bảng xét dấu của $f'(|3-x|)$:

x	$-\infty$	-1	2	3	4	7	$+\infty$				
$f' 3-x $	$-$	0	$+$	0	$-$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $y = f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;3)$.

B. $(1;3)$.

C. $(3;+\infty)$.

D. $(-3;1)$.

Lời giải

Chọn B



$$g'(x) = 2f'(x) \cdot f(x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}, \text{ ta có bảng xét dấu}$$

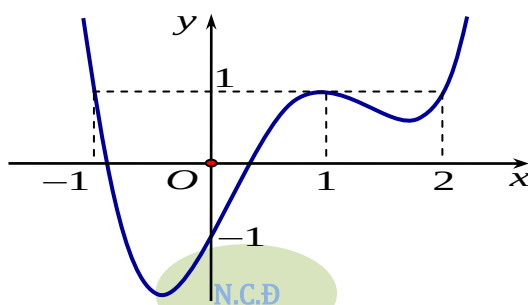
x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-	0	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+	0	+

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(1; 3)$.

$\Rightarrow$ Chọn B.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$g(x) = f(x-1) + \frac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(2; 3)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x-1) - 1$.

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-1) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-1) \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq -1 \\ x-1 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Từ đó suy ra hàm số $g(x) = f(x-1) + \frac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	-	+	0	-

Hàm số $y = f(x-1) + x^3 - 12x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(1; 2)$

C. $(-\infty; 1)$.

D. $(3; 4)$.

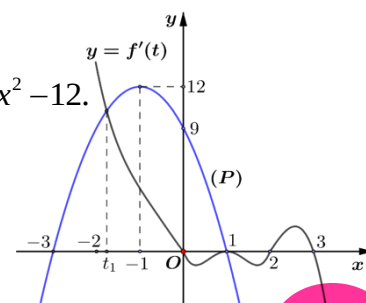
Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x) = f(x-1) + x^3 - 12x + 2019$, ta có $g'(x) = f'(x-1) + 3x^2 - 12$.

Đặt $t = x-1 \Rightarrow x = t+1$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(t) + 3t^2 + 6t - 9 = f'(t) - (3t^2 - 6t + 9).$$



Hàm số nghịch biến khi $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(t) < -3t^2 - 6t + 9$ (1).

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(t)$ và parabol(P): $y = -3t^2 - 6t + 9$

(Hình bên) ta có:

$$(1) \Leftrightarrow t_1 < t < 1 \Rightarrow -3 < t < 1 \Rightarrow -3 < x-1 < 1 \Rightarrow -2 < x < 2$$

$\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $(-2; 2)$

$\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $(1; 2)$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

B. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

C. $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = -2f'(1-2x)$

Cách 1:

$$y' = -2f'(1-2x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \leq -3 \\ -2 \leq 1-2x \leq 1 \\ 1-2x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ và $(2; +\infty)$.

Cách 2:

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ ta có

$$y' = -2f'(1-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x = -3 \\ 1-2x = -2 \\ 1-2x = 0 \\ 1-2x = 1 \\ 1-2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \text{ (trong đó nghiệm } x = \frac{1}{2} \text{ là nghiệm bội)}$$

chẵn)

Bảng xét dấu y' như sau :

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$		
$f'(1-2x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(0; \frac{3}{2})$ và $(3; +\infty)$.

Cách 3 (Trắc nghiệm)

Ta có : $y'(-\frac{1}{4}) = -2f'(\frac{3}{2}) < 0$, mà $-\frac{1}{4} \in (-\frac{1}{2}; 1)$ và $-\frac{1}{4} \in (-2; \frac{1}{2})$ nên loại đáp án B và C.

$y'(\frac{7}{4}) = -2f'(-\frac{5}{2}) < 0$, mà $\frac{7}{4} \in (\frac{3}{2}; 3)$ nên loại đáp án D.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

và hàm số $g(x) = f(1-2x)$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A. $x = \frac{1}{2}$ là một điểm cực đại và $x = 0$ là một điểm cực tiểu của hàm số $y = g(x)$.

B. Hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

C. Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $x = 2$.

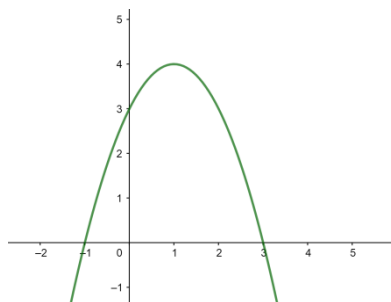
D. $x = -1$ là một điểm cực đại và $x = 2$ là một điểm cực tiểu của hàm số $y = g(x)$.

Lời giải

Chọn A

Theo cách 2 của câu 34 kết luận hàm số có 2 cực đại là $x = -1$, $x = \frac{3}{2}$ và 2 điểm cực tiểu là $x = 0$, $x = 2$ nên chỉ có đáp án A sai.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ sau



Hàm số $g(x) = f(2x^4 - 1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(\frac{1}{2}; 1)$.

C. $(1; \frac{3}{2})$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

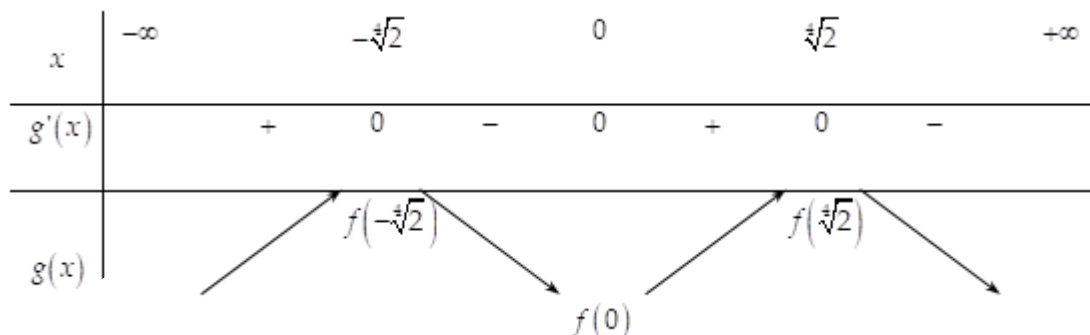
Chọn B

Ta có $g'(x) = 8x^3 f'(2x^4 - 1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ f'(2x^4 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^4 - 1 = -1 \\ 2x^4 - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[4]{2} \\ x = -\sqrt[4]{2} \end{cases}.$$

(Trong đó $x = 0$ là nghiệm bội lẻ (bội 7)).

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ và dấu của $g'(x)$, ta có BBT như sau:



$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -\sqrt[4]{2})$ và $(0; \sqrt[4]{2})$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(\frac{1}{2}; 1)$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$			-	0	+	0	-	0	-	0	+	0	-

Hàm số $y = f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(0; \frac{3}{2})$. B. $(-\frac{1}{2}; 1)$. C. $(-2; -\frac{1}{2})$. D. $(\frac{3}{2}; 3)$.

Lời giải

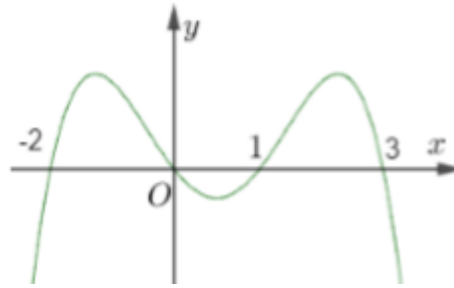
Chọn A

Ta có: $y' = -2f'(1-2x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) \leq 0$

$$\text{Từ bảng xét dấu ta có } f'(1-2x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \leq -3 \\ -2 \leq 1-2x \leq 1 \\ 1-2x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq -1 \end{cases}$$

Từ đây ta suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0; \frac{3}{2})$

Câu 17. Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Hàm số $y = f(x^2 + 2x + 3)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; +\infty)$.

C. $(-2; 0)$.

D. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = f(x^2 + 2x + 3) \Rightarrow g'(x) = 2(x+1)f'(x^2 + 2x + 3)$.

Do $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geq 2$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có:

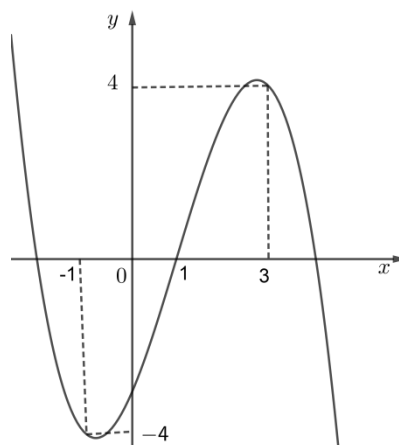
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(x^2 + 2x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x + 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+

Suy ra hàm số $y = f(x^2 + 2x + 3)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2; -1)$ và $(0; +\infty)$ nên chọn D.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới.



Hàm số $y = f(x) - x^2 + 2x$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-1; 2)$.

B. $(1; 3)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

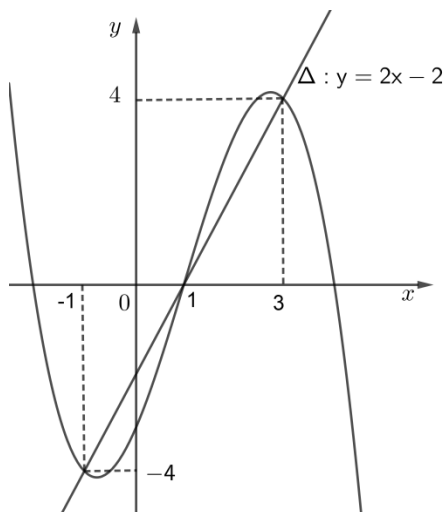
Chọn C

Đặt $y = g(x) = f(x) - x^2 + 2x$.

Ta có: $g'(x) = (f(x) - x^2 + 2x)' = f'(x) - 2x + 2$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x - 2.$$

Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $(\Delta): y = 2x - 2$ (như hình vẽ dưới).



Dựa vào đồ thị ta thấy $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Dấu của $g'(x)$ trên khoảng $(a; b)$ được xác định như sau:

Nếu trên khoảng $(a; b)$ đồ thị hàm $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $(\Delta): y = 2x - 2$ thì $g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a; b)$.

Nếu trên khoảng $(a; b)$ đồ thị hàm $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng $(\Delta): y = 2x - 2$ thì $g'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a; b)$.

Dựa vào đồ thị ta thấy trên $(-1; 1)$ đồ thị hàm $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng $(\Delta): y = 2x - 2$ nên $g'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (-1; 1)$.

Do đó hàm số $y = f(x) - x^2 + 2x$ nghịch biến trên $(-1; 1)$ mà $(0; 1) \subset (-1; 1)$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x - 2)$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1; 1)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	0	+

Ta có $g'(x) = (1-2x)f'(x-x^2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-2x)f'(x-x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x=0 \\ f'(x-x^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x-x^2=-1 \\ x-x^2=1 \\ x-x^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+	0	-

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $g(x) = f(x-x^2)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

Hàm số $y = g(x) = f(x^2) + \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} - 6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-2; -1)$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $(-4; -3)$. **D.** $(-6; -5)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Giải nhanh

Ta có: $y' = 2x \cdot f'(x^2) + 2x^3 + 2x^2 - 12x$

+ Chọn $x = -5,5 \in (-6; -5) \Rightarrow y'(-5,5) = -11f'(30,25) - \frac{825}{4} < 0$

vì theo BBT $30,25 > 4 \Rightarrow f'(30,25) > 0 \Rightarrow -11f'(30,25) < 0$ nên loại bỏ đáp án **D**.

+ Tương tự chọn $x = -4,5$ ta đều được $y'(-4,5) < 0$ nên loại bỏ đáp án **C**.

+ Chọn $x = 1,5$ ta đều được $y'(1,5) = 3f'(2,25) - \frac{27}{4} < 0$

vì theo BBT $1 < 2,25 < 4 \Rightarrow f'(2,25) < 0 \Rightarrow 3f'(2,25) < 0$ nên loại bỏ đáp án **B**.

Cách 2: Tự luận

Ta có $y' = 2x \cdot f'(x^2) + 2x^3 + 2x^2 - 12x = 2x[f'(x^2) + x^2 + x - 6]$

$f'(x^2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2\}$



Mặt khác: $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	$+\infty$					
$f'(x^2)$	+		+	0	-	0	+		+	0	-	0	+
x^2+x-6	+	0	-		-		-		-		-	0	+
$g'(x)$	-	0	$kx\hat{d}$		+	0	$kx\hat{d}$	0	$kx\hat{d}$		-	0	+

(kxđ: không xác định)

Vậy hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		1		-3	$+\infty$



Hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(2; +\infty)$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn B

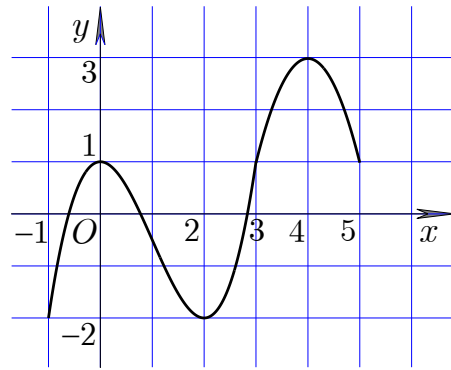
$$y' = (2x - 2) f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = 0 \\ x^2 - 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Lập bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	$1-\sqrt{3}$	0	1	2	$1+\sqrt{3}$	$+\infty$				
$2x-2$	-		-		0		+				
$f'(x^2-2x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+		
y'	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y = -2f(2-x) + x^2$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-3; -2)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Giải nhanh

Ta có : $y' = 2f(2-x) + 2x$.

+ Chọn $x = -2,1 \in (-3; -2) \Rightarrow y'(-2,1) = 2f'(4,1) - 4,2 > 0$

vì theo đồ thị $f'(4,1) \approx 3 \Rightarrow 2f'(4,1) - 4,2 > 0$.Nên đáp án **A sai**.

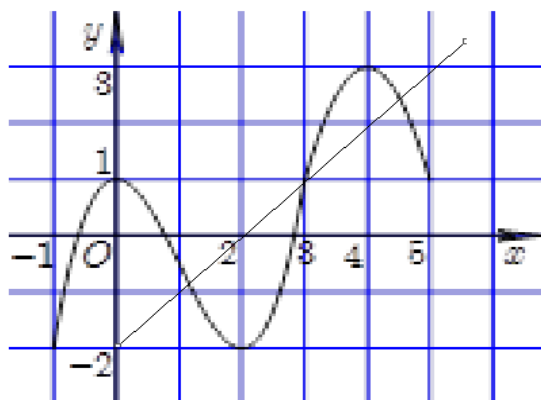
+ Chọn $x = -1,9 \in (-2; -1) \Rightarrow y'(-1,9) = 2f'(3,9) - 3,8 > 0$

vì theo đồ thị $f'(3,9) \approx 3 \Rightarrow 2f'(3,9) - 3,8 > 0$.Nên đáp án **B sai**.

+ Chọn $x = 1,5 \in (0; 2) \Rightarrow y'(1,5) = 2f'(0,5) + 3 > 0$

vì theo đồ thị $f'(0,5) > 0 \Rightarrow 2f'(0,5) + 3 > 0$.Nên đáp án **D sai**.

Cách 2: Giải tự luận

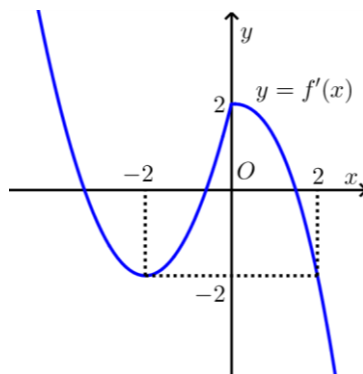


Ta có $y = -2f(2-x) + x^2 \Rightarrow y' = -(2-x)' 2f'(2-x) + 2x$

$y' = 2f'(2-x) + 2x \Rightarrow y' < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) + x < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < (2-x) - 2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại hai điểm có hoành độ nguyên liên tiếp là $\begin{cases} 1 < x_1 < 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ và cũng từ đồ thị ta thấy $f'(x) < x - 2$ trên miền $2 < x < 3$ nên $f'(2 - x) < (2 - x) - 2$ trên miền $2 < 2 - x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 0$.
Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 23. Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(x - 1) + x^2 - 2x$ đồng biến trên khoảng



A. $1; 2$.

B. $-1; 0$.

C. $0; 1$.

D. $-2; -1$.

Lời giải

N.C.Đ

Chọn A

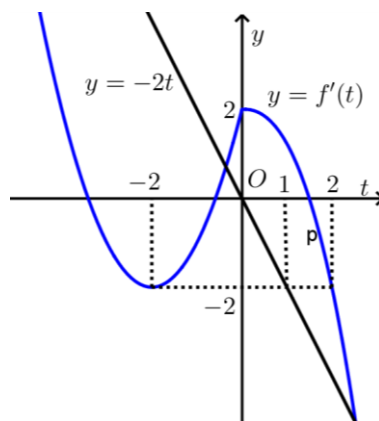
Ta có $y = f(x - 1) + x^2 - 2x$

Khi đó $y' = f'(x - 1) + 2x - 2$. Hàm số đồng biến khi $y' \geq 0$

$$\Leftrightarrow f'(x - 1) + 2(x - 1) \geq 0$$

Đặt $t = x - 1$ thì trở thành: $f'(t) + 2t \geq 0 \Leftrightarrow f'(t) \geq -2t$.

Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -2t$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ.

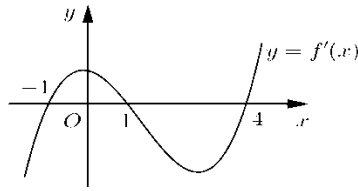


Khi đó ta thấy với $t \in [0; 1]$ thì đồ thị hàm số $y = f'(t)$ luôn nằm trên đường thẳng $y = -2t$.

Suy ra $f'(t) + 2t > 0, \forall t \in [0; 1]$. Do đó $\forall x \in [1; 2]$ thì hàm số $y = f(x - 1) + x^2 - 2x$ đồng biến.



Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(3-2x)+2019$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(1;2)$.

B. $(2;+\infty)$.

C. $(-\infty;1)$.

D. $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f(3-2x) + 2019 \Rightarrow g'(x) = -2f'(3-2x)$.

Cách 1: Hàm số nghịch biến khi $g'(x) = -2f'(3-2x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 3-2x < 1 \\ 3-2x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ . Chọn đáp án A}$$

Cách 2: Lập bảng xét dấu

$$g'(x) = -2f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x = -1 \\ 3-2x = 1 \\ 3-2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$			
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+

Lưu ý : cách xác định dấu của $g'(x)$. Ta lấy $3 \in (2;+\infty)$, $g'(3) = -2.f'(3-2.3) = -2f'(-3) > 0$ (vì theo đồ thị thì $f'(-3)$ nằm dưới trục Ox nên $f'(-3) < 0$)

Dựa vào bảng xét dấu, ta chọn đáp án A.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Gọi $g(x) = 2f(1-x) + \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - 5$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.



Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét } g'(x) = -2f'(1-x) + x^3 - 3x^2 + 2x = -2f'(1-x) - (1-x)^3 + 1 - x$$

$$\text{Đặt } 1-x=t, \text{ khi đó } g'(x) \text{ trở thành } h(t) = -2f'(t) - t^3 + t$$

Bảng xét dấu

t	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
$-2f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$t^3 - t$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	0
$h(t)$	Không xác định		$+$	0	$-$	0

Từ bảng xét dấu ta suy ra $h(t)$ nhận giá trị dương trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(0; 1)$, nhận giá trị âm trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

$\Rightarrow$ hàm số $g'(x)$ nhận giá trị dương trên $(2; 3)$ và $(0; 1)$, nhận giá trị âm trên $(1; 2)$ và $(-\infty; 0)$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 3$ và hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-6	6	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$				$+\infty$

Hàm số $y = g(f(x))$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-1; 1)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-2; 0)$.

D. $(0; 4)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 6x + 5; f'(x) = 3(x-1)^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$y' = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow g'(f(x)) < 0 \Leftrightarrow -6 < f(x) < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 5x + 9 > 0 \\ x^3 - 3x^2 + 5x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x^2 - 4x + 9) > 0 \\ (x-1)(x^2 - 2x + 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	+	-	0	+

Đặt $g(x) = f(x^2 - 2x + 2) + x^3 - 3x^2 - 6x$.

Xét các khẳng định

- 1) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.
- 2) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.
- 3) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

Số khẳng định đúng trong các khẳng định trên là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x+2) + 3x^2 - 6x - 6$.

Do $g'\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \cdot f'\left(\frac{13}{4}\right) - \frac{9}{4} < 0$ vì $f'\left(\frac{13}{4}\right) < 0$ (dựa vào bảng dấu của $f'(x)$), do đó hàm số $g(x)$ không thể đồng biến trên khoảng $(2;3)$. Vậy mệnh đề 1) là sai.

Do $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \cdot f'\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{33}{4} < 0$ vì $f'\left(\frac{5}{4}\right) > 0$ (dựa vào bảng dấu của $f'(x)$), do đó hàm số $g(x)$ không thể đồng biến trên khoảng $(0;1)$. Vậy mệnh đề 2) là sai.

Với $x \in (4;+\infty) = E$, ta thấy:

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 10 \Rightarrow f'(x^2 - 2x + 2) > 0 \text{ và } 2x - 2 > 0 \text{ nên}$$

$$(2x-2) \cdot f'(x^2 - 2x + 2) > 0, \forall x \in (4;+\infty) \text{ (a);}$$

$$\text{Để thấy } 3x^2 - 6x - 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 - \sqrt{3} \\ x > 1 + \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 6x - 6 > 0, \forall x \in (4;+\infty) \text{ (b).}$$

Cộng theo vế của (a) và (b) suy ra

$$g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x+2) + 3x^2 - 6x - 6 > 0, \forall x \in (4;+\infty).$$

Vậy $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$. Do đó 3) là mệnh đề đúng.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Có bao nhiêu số nguyên $m \in (0;2020)$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$?

A. 2018.

B. 2017.

C. 2016.

D. 2015.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $g(x) = f(x^2 - x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$

$$\Leftrightarrow g'(x) = (2x-1) \cdot f'(x^2 - x + m) \leq 0 \quad \forall x \in (-1; 0)$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2 - x + m) \geq 0 \quad \forall x \in (-1; 0) \quad (\text{do } 2x-1 < 0 \quad \forall x \in (-1; 0))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + m \leq 1 \\ x^2 - x + m \geq 4 \end{cases} \quad \forall x \in (-1; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq -x^2 + x \\ m-4 \geq -x^2 + x \end{cases} \quad \forall x \in (-1; 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq \min_{[-1;0]}(h(x) = -x^2 + x) = h(-1) = -2 \\ m-4 \geq \max_{[-1;0]}(h(x) = -x^2 + x) = h(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 4 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $m \in (0; 2020)$, suy ra: $m \in [4; 2020)$.

Vậy có 2016 giá trị m nguyên thỏa đề.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-4		-1		2		7		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	0	-	

Hàm số $y = f(2x+1) + \frac{2}{3}x^3 - 8x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$.B. $(-\infty; -2)$.C. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.D. $(-1; 7)$.

Lời giải

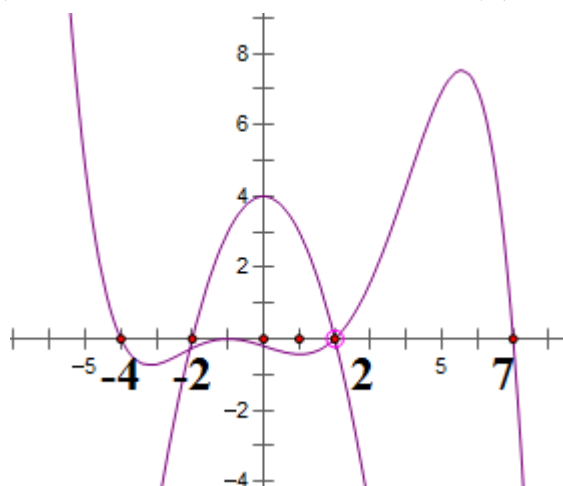
Chọn C

$$g(x) = f(2x+1) + \frac{2}{3}x^3 - 8x + 2019.$$

$$g'(x) = 2f'(2x+1) + 2x^2 - 8.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x+1) = 4 - x^2(1).$$

Hàm số $f'(2x+1)$ có bảng xét dấu như hàm số $f'(x)$ nên ta có:





$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=x_1 \quad (-4 < x_1 < -2) \\ 2x+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{x_1-1}{2} \left(-\frac{5}{2} < x < -\frac{3}{2} \right) \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$\frac{x_1-1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = 3f(-x+2) + x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A.** $(-2; 1)$. **B.** $(2; +\infty)$. **C.** $(0; 2)$. **D.** $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 9 - 3f'(2-x)$.

Hàm số y nghịch biến khi $y' \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq f'(2-x)$. Bất phương trình này không thể giải trực tiếp ta sẽ tìm điều kiện để

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ f'(2-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ 2-x \leq -1 \\ 1 \leq 2-x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Đối chiếu các đáp án chọn A.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = 3f(-x+2) + x^3 + 3x^2 - 9x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

- A.** $(-2; 1)$. **B.** $(-\infty; -2)$. **C.** $(0; 2)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Lời giải

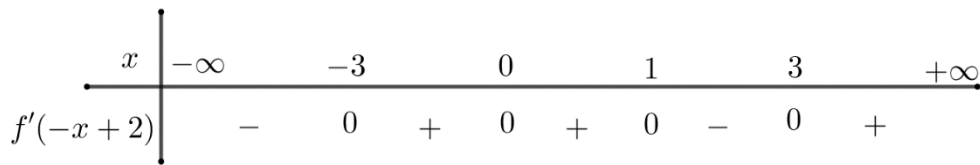
Chọn A

Theo đề bài: $y' = [3f(-x+2) + x^3 + 3x^2 - 9x]' = -3f'(-x+2) + 3x^2 + 6x - 9$.

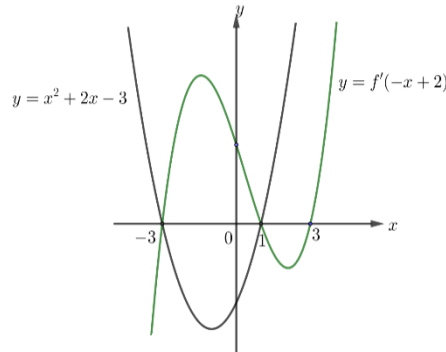
Để hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow -3f'(-x+2) + 3x^2 + 6x - 9 < 0$

$$\Leftrightarrow f'(-x+2) > x^2 + 2x - 3$$

Từ BXD $f'(x)$ ta có BXD của $f'(-x+2)$ như sau:

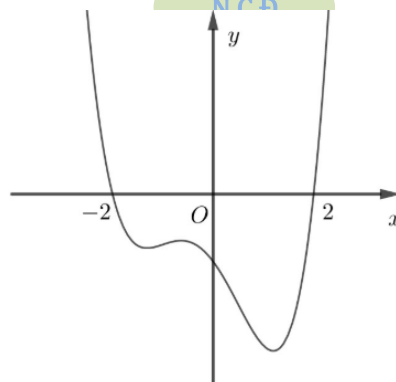


Từ BXD trên, ta có hình dạng đồ thị của hàm số $y' = f'(-x+2)$ và $y = x^2 + 2x - 3$ được vẽ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị ta có hàm số nghịch biến trên $(-3;1)$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết $f(-2) < 0$, hàm số $y = |f(1 - x^{2018})|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-^{2018}\sqrt{3}; ^{2018}\sqrt{3})$. B. $(-1; +\infty)$. C. $(-\infty; -^{2018}\sqrt{3})$. **D. $(-^{2018}\sqrt{3}; 0)$.**

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đường thẳng hàm số $y = f'(x)$ và $f(-2) < 0$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$f(-2) < 0$	$f(2)$	$+\infty$	

Ta có $1 - x^{2018} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ mà $\max_{(-\infty; 2)} f(x) = f(-2) < 0 \Rightarrow f(1 - x^{2018}) < 0$

Do đó $y = |f(1 - x^{2018})| = -f(1 - x^{2018}) \Rightarrow y' = 2018x^{2017} f'(1 - x^{2018})$.

Hàm số đồng biến $\Rightarrow y' > 0 \Leftrightarrow 2018x^{2017} f'(1 - x^{2018}) > 0$.

Trường hợp 1. Với $x > 0$

$$y' > 0 \Leftrightarrow f'(1 - x^{2018}) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^{2018} > 2 \\ 1 - x^{2018} < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2018} < -1 \text{ (loại)} \\ x^{2018} > 3 \end{cases} \Rightarrow x > \sqrt[2018]{3} \text{ (vì } x > 0 \text{)}.$$

Trường hợp 2. Với $x < 0$

$$y' > 0 \Leftrightarrow f'(1 - x^{2018}) < 0 \Leftrightarrow -2 < 1 - x^{2018} < 2 \Leftrightarrow -1 < x^{2018} < 3 \Rightarrow -\sqrt[2018]{3} < x < 0.$$

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Hàm số $y = g(x) = f(x^2) + \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} - 6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; -1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-6; -5)$.

D. $(-4; -3)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

N.C.Đ

Ta có $y' = g'(x) = 2xf'(x^2) + 2x^3 + 2x^2 - 12x$.

Đặt $h(x) = 2x^3 + 2x^2 - 12x$.

Bảng xét dấu $h(x)$:

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$		
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Đối với dạng toán này ta thay từng phương án vào để tìm ra khoảng đồng biến của $g(x)$.

$$\text{Với } x \in (-2; -1) \Rightarrow \begin{cases} x^2 \in (1; 4) \Rightarrow f'(x^2) < 0 \\ x < 0 \\ h(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xf'(x^2) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}.$$

$\Rightarrow 2xf'(x^2) + 2x^3 + 2x^2 - 12x > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$. Vậy $g(x)$ đồng biến trong khoảng $(-2; -1)$.

$$\text{Với } x \in (1; 2) \Rightarrow \begin{cases} x^2 \in (1; 4) \Rightarrow f'(x^2) < 0 \\ x > 0 \\ h(x) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xf'(x^2) < 0 \\ h(x) \leq 0 \end{cases}.$$

$\Rightarrow 2xf'(x^2) + 2x^3 + 2x^2 - 12x < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$. Vậy $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1; 2)$.



Kết quả tương tự với $x \in (-6; -5)$ và $x \in (-4; -3)$.

Cách 2:

Ta có $g'(x) = 2x[f'(x^2) + x^2 + x - 6]$.

Bảng xét dấu của $g'(x)$ trên các khoảng $(-6; -5)$, $(-4; -3)$, $(-2; -1)$, $(1; 2)$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2
$2x$	-		-		-		+	
$x^2 + x - 6$	+		+		-		-	
$f'(x^2)$	+		+		-		-	
$g'(x)$	-		-		+		-	

Từ bảng xét dấu ta chọn hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên. Hàm số $y = e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+

A. $(1; +\infty)$

B. $(-\infty; -2)$.

C. $(-1; 3)$.

D. $(-2; 1)$.

N.C.Đ
Lời giải

Chọn D

Từ bảng đạo hàm ta thấy $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$

$$y = e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)}$$

$$\Rightarrow y' = -3 \cdot f'(2-x) \cdot e^{3f(2-x)+1} - f'(2-x) \cdot 3^{f(2-x)} \cdot \ln 3$$

$$\Leftrightarrow y' = -f'(2-x) \cdot (3e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)} \cdot \ln 3)$$

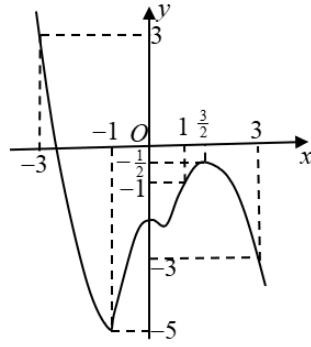
Để hàm số đồng biến thì $y' = -f'(2-x) \cdot (3e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)} \cdot \ln 3) > 0$

$$\Leftrightarrow -f'(2-x) > 0 \text{ (Vì } 3e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)} \cdot \ln 3 > 0)$$

$$\Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -1 \\ 1 < 2-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (-2; 1).$$

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

B. $(1; 3)$.

C. $(-3; 1)$.

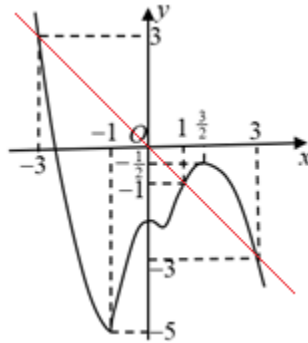
D. $(-2; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$. Ta có $g'(x) = -f'(1-x) - (1-x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1-x) = -(1-x) \quad (*)$$



Dựa vào đồ thị ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = -3 \\ 1-x = 1 \\ 1-x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$:

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	-
$g(x)$					

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g(x) = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2; 0)$ và $(4; +\infty)$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-3; -2)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-2; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x) = f(x^2 + 2x)$. Ta có $g'(x) = f'(x^2 + 2x) \cdot (2x + 2)$.

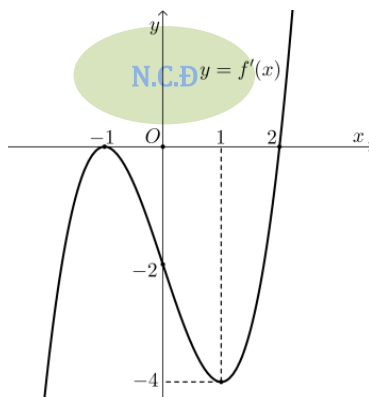
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = -2 \\ x^2 + 2x = 0 \\ x^2 + 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$
$2x+2$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x^2+2x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x)$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 3)$.

B. $(-3; -1)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$g'(x) = [f(x^2 - 2)]' = (x^2 - 2)' \cdot f'(x^2 - 2) = 2x \cdot f'(x^2 - 2).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

$$f'(x^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}, \quad f'(x^2 - 2) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x^2 - 2)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	1	2	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Cho hàm số $y = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$ B. $(-1; 0)$ C. $(0; 2)$ **D. $(2; +\infty)$**

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x + 3$ khi đó $y(t) = 3f(t) - (t-3)^3 + 12(t-3)$ Ta có

$$y'(t) = 3f'(t) - 3(t-3)^2 + 12 = 3f'(t) - (t-1)(t-5)$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $t > 5$ thì $f'(t) < 0; -(t-1)(t-5) < 0$ nên

hàm số nghịch biến với $t > 5$ hay $x > 2$. **N.C.Đ**

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$. Hàm số $g(x) = -f(x^2 - 1)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(1; +\infty)$. **B. $(0; 1)$.** C. $(-\infty; -1)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

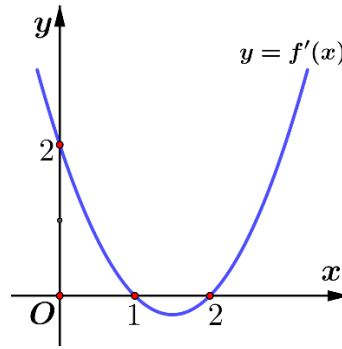
$$\text{Ta có: } g'(x) = -2x \cdot f'(x^2 - 1) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
g		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$.



Hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. **C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.** D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

- Từ đồ thị ta thấy: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$.
- Ta có: $g'(x) = [f(x - x^2)]' = (x - x^2)' \cdot f'(x - x^2) = (1 - 2x) \cdot f'(x - x^2)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ f'(x - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x - x^2 = 1 \\ x - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

(Lưu ý: $x - x^2 = 1$ và $x - x^2 = 2$ không có nghiệm thực)

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

Vậy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Cách 2:

- Ta có: $g'(x) = [f(x - x^2)]' = (x - x^2)' \cdot f'(x - x^2) = (1 - 2x) \cdot f'(x - x^2)$.
- Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$
 $\Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b)$ và $g'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a; b)$.
- Chọn $x = 0$ ta có: $g'(0) = (1 - 2 \cdot 0) \cdot f'(0) = f'(0) > 0$.

Suy ra loại các đáp án A, B, D. Vậy chọn đáp án C.



Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 - 2x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-\infty; 2)$.

C. $(-4; 2)$.

D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

+ Ta có $f'(x) = x^3 - 2x^2$ suy ra $f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^3 - 2x^2) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + C$

+ Suy ra $y = g(x) = f(2-x) = \frac{(2-x)^4}{4} - \frac{2(2-x)^3}{3} + C$

+ Tính $g'(x) = f'(2-x) = \left(\frac{(2-x)^4}{4} - \frac{2(2-x)^3}{3} + C \right)' = -(2-x)^3 + 2(2-x)^2 = (2-x)^2 x$

+ Hàm số đồng biến suy ra $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Chọn A..

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến $\forall x \in (a; b)$. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2-b; 2-a)$.

B. $(-\infty; 2-a)$.

C. $(a; b)$.

D. $(2-b; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

+ Vì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến $\forall x \in (a; b)$ nên $f'(x) < 0; \forall x \in (a; b)$.

+ Xét $y = g(x) = f(2-x)$ có $g'(x) = -f'(2-x)$

+ Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến thì $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0$

Suy ra $a < 2-x < b \Leftrightarrow 2-b < x < 2-a$. Chọn A.

CHỦ ĐỀ: ĐƠN ĐIỀU

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 2

BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Kiến thức bổ sung 1: Biện luận nghiệm bất phương trình chứa tham số.

- ❶ $m \geq f(x) \quad \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow m \geq \max_{[a; b]} f(x).$
- ❷ $m \leq f(x) \quad \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow m \leq \min_{[a; b]} f(x).$
- ❸ $m \geq f(x)$ có nghiệm trên $[a; b] \Leftrightarrow m \geq \min_{[a; b]} f(x).$
- ❹ $m \leq f(x)$ có nghiệm trên $[a; b] \Leftrightarrow m \leq \max_{[a; b]} f(x).$

Kiến thức bổ sung 2: So sánh 2 nghiệm của tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với số thực α .

- ❶ $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow a \cdot f(\alpha) < 0.$
- ❷ $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 2\alpha \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \end{cases}.$
- ❸ $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 2\alpha \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \end{cases}.$

Bài toán 1: Tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Phương pháp:

+ Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ là tam thức bậc 2 có biệt thức Δ .

+ Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

+ Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Bài toán 2: Tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) đơn điệu trên $(a; b)$.

Phương pháp:

+ Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ là tam thức bậc 2 chứa tham số m .

+ Hàm số đồng biến trên $(a; b) \Leftrightarrow y' = f'(x, m) \geq 0 \forall x \in (a; b)$ (hoặc hàm số nghịch biến trên $(a; b) \Leftrightarrow y' = f'(x, m) \leq 0 \forall x \in (a; b)$).

Cách 1: ($f(x, m)$ bậc nhất đối với m , hoặc $f(x, m)$ không có nghiệm “chẵn”)

+ Biến đổi bpt $f(x, m) \geq 0 \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow g(x) \geq h(m) \forall x \in (a; b)$ hoặc $g(x) \leq h(m) \forall x \in (a; b)$.

+ Tìm GTLN, GTNN của $y = g(x)$ trên $[a; b]$.

(Sử dụng kiến thức bổ sung 1 để kết luận tập nghiệm bất phương trình).

Cách 2: (tham số m trong $f(x, m)$ có chứa bậc 1 và bậc 2, hoặc $f(x, m)$ có nghiệm “chẵn”)

+ Tìm các nghiệm của tam thức bậc hai, lập bảng xét dấu.

+ Gọi S là tập hợp có dấu “thuận lợi”. Yêu cầu bài toán xảy ra khi $(a; b) \subset S$. Sau đó sử dụng kiến thức bổ sung 2 giải quyết bài toán.

Nhận xét: Nên xét cụ thể trường hợp $a = 0$ nếu hệ số a có chứa tham số.

Bài toán 3: Tìm tham số m để hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) đơn điệu trên $(a; b)$.

Phương pháp:

$$+ \text{Tính } y' = 4ax^3 + 2bx; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases} \text{ N.C.Đ}$$

+ Lập bảng xét dấu y' , giả sử có S là tập “thuận lợi”.

+ Yêu cầu của bài toán thỏa mãn khi $(a; b) \subset S$. Sau đó sử dụng kiến thức bổ sung 2 giải quyết bài toán.

Nhận xét: Nên xét cụ thể trường hợp $a = 0$ nếu hệ số a có chứa tham số.

Bài toán 4: Tìm tham số m để hàm số phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$) đơn điệu trên $(m; n)$.

Phương pháp:

$$+ \text{Hàm số } y = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ đồng biến trên } (m; n) \Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m; n) \end{cases}$$

$$+ \text{Hàm số } y = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ nghịch biến trên } (m; n) \Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m; n) \end{cases}$$

Bài toán 5: Tìm tham số m để hàm số $y = f[u(x)]$ đơn điệu trên $(a; b)$.

Phương pháp:

Đặt $t = u(x)$ hàm số trở thành $y = f(t)$. Trường hợp này cần chú ý 3 vấn đề sau:

1. Tìm miền xác định của $t = u(x)$ cho chính xác.

2. Nếu $t = u(x)$ đồng biến trên thì $f[u(x)]$ và $f(t)$ cùng tính chất đồng biến hoặc nghịch biến.
3. Nếu $t = u(x)$ nghịch biến trên thì $f[u(x)]$ và $f(t)$ ngược tính chất, nghĩa là $f[u(x)]$ đồng biến thì $f(t)$ nghịch biến và ngược lại.

BÀI TẬP

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - 2m)x^3 + mx^2 + 3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m < 0$. B. $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 3 \end{cases}$. D. $1 < m \leq 3$.

Câu 2. Số giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y = \frac{mx - 2}{-2x + m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ là

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 2.

Câu 3. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

- A. $m \in [-1; 1]$. B. $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. D. $m \in (-1; 1)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{mx - 4}{x + 1}$ (với m là tham số thực) có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	-2	$+\infty$	-2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Với $m = -2$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.
B. Với $m = 9$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.
C. Với $m = 3$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.
D. Với $m = 6$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = (m+1)\sin x + (m+1)x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \leq -1$. B. $m = -1$. C. $m < -1$. D. Không tồn tại m .

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + x^2 - mx + 2m - 1$ nghịch biến trên đoạn $[-1; 1]$.

- A. $m \leq -\frac{1}{6}$. B. $m \geq -\frac{1}{6}$. C. $m \leq 8$. D. $m \geq 8$.

Câu 7. Tìm m để hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

- A. $m < -\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2} < m \leq 1$. C. $-\frac{1}{2} \leq m < 1$. D. $m \leq 1$.

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{mx^3}{3} - x^2 + 2x + 1 - m$. Tập hợp các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

- A. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. B. $\{0\}$. C. $(-\infty; 0)$. D. $\emptyset$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. Vô số.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc khoảng $(-1000; 1000)$ để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

- A. 999. B. 1001. C. 1998. D. 998.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x-m}$. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên $(0; 3]$.

- A. $m > 3$. B. $0 < m < 2$. C. $2 < m \leq 3$. D. $m \leq 0$.

Câu 12. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $[3; +\infty)$. B. $[48; +\infty)$. C. $[36; +\infty)$. D. $[12; +\infty)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$. Giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ là $\left[-\infty; \frac{b}{a}\right]$ với $\frac{b}{a}$ là phân số tối giản. Khi đó $T = 2a + b$ bằng

- A. 19. B. 14. C. 13. D. 17.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = (x+m)^3 - 8(x+m)^2 + 16$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$?

- A. 2. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 15. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ đơn điệu trên khoảng $(1; 2)$?

- A. 37. B. 16. C. 35. D. 21.

Câu 16. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x - 6m^3$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

- A. $(-\infty; 1]$. B. $(-\infty; 2]$. C. $(-\infty; 0]$. D. $[2; +\infty)$.

Câu 17. Tất cả giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 - (m+1)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ là

- A. $m \geq 2$. B. $m \leq \frac{11}{9}$. C. $m \geq \frac{11}{9}$. D. $m \leq 2$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + 3m - 2$ đồng biến trên khoảng $(2; 5)$.

- A. $m \leq 1$. B. $m \leq 5$. C. $m < 5$. D. $m < 1$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

- A. 18. B. 17. C. 16. D. 20.

Câu 20. Số các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$?

- A. 2034. B. 2018. C. 2025. D. 2021.

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x + m\sqrt{x^2 + 2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 22. Hàm số $y = \frac{2x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi?

- A. $m \leq 0$. B. $m < 0$. C. $m \leq 2$. D. $m < 2$.

Câu 23. Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{2\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là

- A. $m > 1$. B. $m > \frac{1}{2}$. C. $m \geq \frac{1}{2}$. D. $m \geq 1$.

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- A. 2028. B. 2018. C. 2020. D. 2019.

Câu 25. Gọi S là tập hợp các số thực m thỏa mãn hàm số $y = mx^4 + x^3 - (m+1)x^2 + 9x + 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Số phần tử của S là

- A. 3 B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 26. Cho hàm số $y = (2m-1)x - (3m+2)\cos x$. Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị hai phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của X bằng

- A. -4. B. -5. C. -3. D. 0.

Câu 27. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ là

- A. $\left(-\infty; -\frac{8}{5}\right)$. B. $\left[-3; -\frac{8}{5}\right]$. C. $\left(-\frac{8}{5}; +\infty\right)$. D. $\left[-\frac{8}{5}; +\infty\right)$.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-19; 19)$ để hàm số $y = \frac{\tan x - 3m + 3}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. 17. B. 10. C. 11. D. 9.

Câu 29. Cho hàm số $y = -2\sin^3 x + 3\sin^2 x + 6(2m-1)\sin x + 2019$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m thuộc khoảng $(-2016; 2019)$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

- A. 2019. B. 2017. C. 2021. D. 2018.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số thực m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m-3$ đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1?

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = m^2 x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

- A. 7. B. 16. C. 15. D. 6.

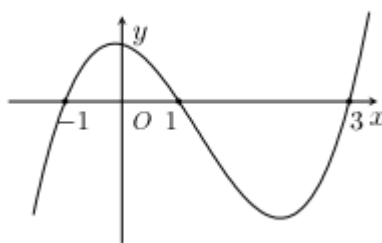
Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



- A. 4. B. 3. C. 6. D. 5.

Câu 34. Cho hàm số $y = \frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10; 10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8; 5)$?

- A. 14. B. 13. C. 12. D. 15.

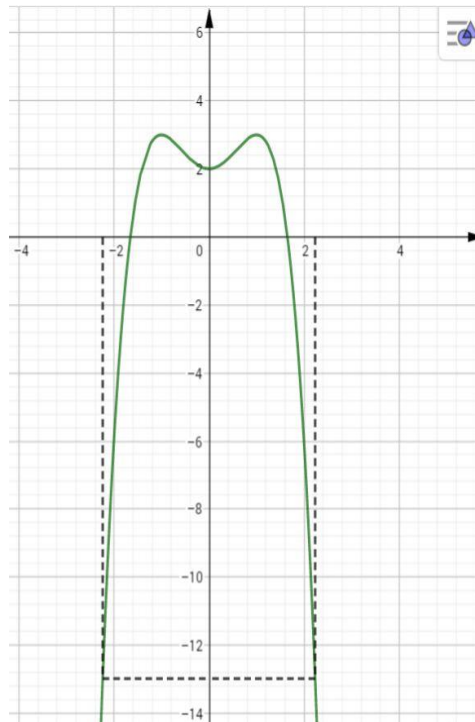
Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $f(0) = f(1) = f(2)$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của c để hàm số $g(x) = f(f(x^2 + 2))$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ là

- A. 1. B. $1 - \sqrt{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $1 + \sqrt{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} - \frac{mx^3}{3} + \frac{x^2}{2} - mx + 2019$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$. Tính số phần tử của S biết rằng $|m| \leq 2020$.

- A. 4041. B. 2027. C. 2026. D. 2015.

Câu 37. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là số thực. Điều kiện cần và đủ để $g(x) \leq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ là

- A. $m \leq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$ B. $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$. C. $m \geq \frac{2}{3}f(-\sqrt{5})$. D. $m \geq \frac{2}{3}f(0)$.

Câu 38. Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = (m^3 - 3m)x^4 + m^2x^3 - mx^2 + x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A. 3. B. 1. C. Vô số. D. 2.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $y = \ln(x^2 + 2) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 2019. B. 2020. C. 4038. D. 1009.

Câu 40 Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 12. B. 0. C. 4. D. 3.

Câu 41. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. -2 . C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$. Với giá trị nào của m thì $f'(x) - 6x > 0$ với mọi $x \geq 2$?

- A. $m > \frac{1}{2}$. B. $m < -\frac{1}{2}$. C. $m > 1$. D. $m \leq 0$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Với giá trị nào của tham số m thì $f'(x) > 0$ với mọi $x \geq -1$?

- A. $m \in \left(-\frac{7}{3}; +\infty\right)$ B. $m \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$
C. $m \in \left(-\frac{7}{3}; \frac{5}{4}\right)$ D. $m \in \left(-\frac{7}{3}; -1\right) \cup \left(-1; \frac{5}{4}\right)$.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (2m-2019)x - (2018-m)\cos^2 x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $m \leq 1$. B. $m \leq \frac{4037}{3}$. C. $m \geq 1$. D. $m \geq -1$.

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để hàm số $y = |2x^3 - 2mx + 3|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

- A. 12. B. 8. C. 11. D. 7.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

- A. 2012. B. 2009. C. 2011. D. 2010.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x^2+mx+5)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x) = f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 7.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^3(x^2-4x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$?

A. 2020. B. 2014. C. 2019. D. 2016.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = f(3x-1) + x^3 - 3mx$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$?

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$				4		$+\infty$
		0		0		0	
			-4				

A. 8. B. 6. C. 7. D. 5.

Câu 50. Giá trị $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^4(x^2 + mx + 9)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$?

A. 6. B. 5. C. 7. D. 8.

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$	-10		-2		3		8	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(x^2 + 4x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?

A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 52. Tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(3x-1) - \frac{m}{x} + 2$ đồng biến trên khoảng

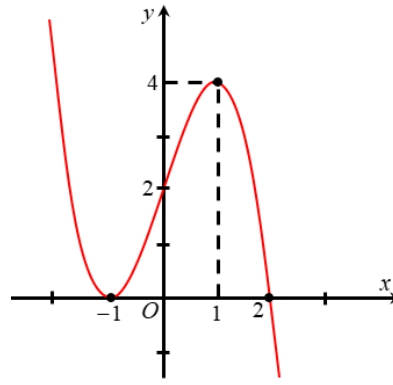
$\left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$

A. $\left(-\frac{7}{3}; +\infty\right).$ B. $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right).$ C. $\left(-\frac{4}{3}; +\infty\right).$ D. $\left(\frac{2}{9}; +\infty\right).$

Câu 53. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(a; b)$ để hàm số $f(x) = x + a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 5. B. 6. C. 4. D. 3.

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x+1) + \frac{20}{m} \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?



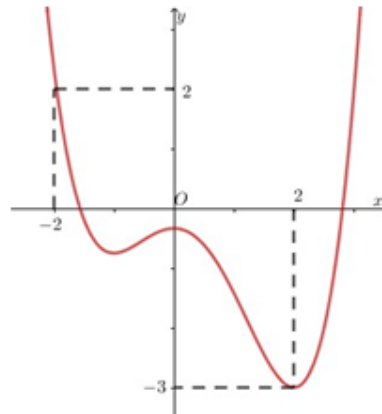
A. 3.

B. 6.

C. 4.

D. 5.

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



N.C.Đ

Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của $m \in (-20; 20)$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^3}{4}\right) - \frac{m(x^2 + 4)^2}{20}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. 6.

B. 7.

C. 17.

D. 18.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - 2m)x^3 + mx^2 + 3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m < 0$.

B. $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 3 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 3 \end{cases}$.

D. $1 < m \leq 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = (m^2 - 2m)x^2 + 2mx + 3$.

$$\text{TH1: } m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Với $m = 0$, $y' = 3 \Rightarrow y' > 0, \forall x$. Do đó, $m = 0$ thỏa mãn hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $m = 2$, $y' = 4x + 3$. Do đó, $m = 2$ không thỏa mãn hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{TH2: } m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ \Delta' = m^2 - 3(m^2 - 2m) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ -2m^2 + 6m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \\ m \geq 3 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m < 0 \end{cases} \text{ N.C.Đ}$$

Vậy $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 3 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Số giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y = \frac{mx - 2}{-2x + m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ là

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = \frac{mx - 2}{-2x + m}$ có tập xác định là $D = \left(-\infty; \frac{m}{2}\right) \cup \left(\frac{m}{2}; +\infty\right)$

Ta có: $y' = \frac{m^2 - 4}{(-2x + m)^2}, \forall x \neq \frac{m}{2}$.

$$\text{Hàm số nghịch biến trên khoảng } \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ \frac{m}{2} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 1 \text{ mà}$$

$m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Câu 3. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. $m \in [-1; 1]$.

B. $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

D. $m \in (-1; 1)$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3.$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ (-3m)^2 - 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-1; 1].$$

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{mx-4}{x+1}$ (với m là tham số thực) có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	+
y	-2	$+\infty$	-2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Với $m = -2$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

B. Với $m = 9$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

C. Với $m = 3$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

D. Với $m = 6$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y' = \frac{m+4}{(x+1)^2} > 0 \Leftrightarrow m > -4. \text{ Mà } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx-4}{x+1} = m.$$

Từ bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -2$. Do đó: $m = -2$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = (m+1)\sin x + (m+1)x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \leq -1$.

B. $m = -1$.

C. $m < -1$.

D. Không tồn tại m .

Lời giải

Chọn C

Khi $m = -1$: $f(x) = 0$ nên không thỏa YCBT. Suy ra loại A, C.

$$\text{Khi } m < -1: f'(x) = (m+1)(\cos x + 1)$$

$$\text{Để hàm số nghịch biến trên } \mathbb{R} \text{ thì } f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -1.$$

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + x^2 - mx + 2m - 1$ nghịch biến trên đoạn $[-1; 1]$.

A. $m \leq -\frac{1}{6}$.

B. $m \geq -\frac{1}{6}$.

C. $m \leq 8$.

D. $m \geq 8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 6x^2 + 2x - m$.

Hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in [-1;1]$.

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 2x - m \leq 0, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow 6x^2 + 2x \leq m, \forall x \in [-1;1].$$

Xét hàm $g(x) = 6x^2 + 2x$ trên đoạn $[-1;1]$.

$$g'(x) = 12x + 2; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}.$$

Bảng biến thiên:

x	-1	$-\frac{1}{6}$	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	4		8

Để $6x^2 + 2x \leq m, \forall x \in [-1;1]$ thì đồ thị của hàm $g(x)$ nằm phía dưới đường thẳng $y = m$.

N.C.Đ

Từ bảng biến thiên ta có $m \geq 8$.

Câu 7. Tìm m để hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. $m < -\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2} < m \leq 1$.

C. $-\frac{1}{2} \leq m < 1$.

D. $m \leq 1$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \neq m$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-2m-1}{(x-m)^2}.$$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì

$$\begin{cases} y' < 0 \\ m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m-1 < 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \leq 1.$$

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{mx^3}{3} - x^2 + 2x + 1 - m$. Tập hợp các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

B. $\{0\}$.

C. $(-\infty; 0)$.

D. $\emptyset$.

Lời giải

Chọn D

$$D = \mathbb{R}$$

$$y' = mx^2 - 2x + 2.$$

$$\text{TH1: } m = 0$$

Ta có: $y' = -2x + 2$. Hàm số nghịch biến khi $y' \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = \frac{mx^3}{3} - x^2 + 2x + 1 - m$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Vậy $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{TH2: } m \neq 0$$

Hàm số $y = \frac{mx^3}{3} - x^2 + 2x + 1 - m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y' = mx^2 - 2x + 2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = 1 - 2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{không có giá trị nào của } m \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9.

Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y = f(x) = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$

$$y' = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m + 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	m			$m+2$	
		$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
		$f(m)$				
y		$+\infty$				
	$-\infty$				$f(m+2)$	

Dựa vào bảng biến thiên trên để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$ ta có $m \leq 2 < 3 \leq m + 2$ tức là: $1 \leq m \leq 2$. Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn. Chọn A.

Câu 10.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc khoảng $(-1000; 1000)$ để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 999.

B. 1001.

C. 1998.

D. 998.

Lời giải

Chọn B

$$y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1.$$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Hàm số có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + m(m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	m	$m+1$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$				$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên $(-\infty; m)$ và $(m+1; +\infty)$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$ khi $(2; +\infty) \subset (m+1; +\infty) \Leftrightarrow m+1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Mà m là số nguyên thuộc khoảng $(-1000; 1000) \Rightarrow m \in \{-999; -998; \dots; 1\}$.

Có tất cả 1001 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x-m}$. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên $(0; 3]$.

A. $m > 3$.

B. $0 < m < 2$.

C. $2 < m \leq 3$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = \frac{-m+2}{(x-m)^2}$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } (0; 3] \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (0; 3] \Leftrightarrow \frac{-m+2}{(x-m)^2} > 0, \forall x \in (0; 3]$$

$$\text{Hay } \begin{cases} -m+2 > 0 \\ m \notin (0; 3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > 3 \text{ hoặc } m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Câu 12. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $[3; +\infty)$.

B. $[48; +\infty)$.

C. $[36; +\infty)$.

D. $[12; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 12x + m.$$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ thì $y' = 3x^2 - 12x + m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Suy ra $m \geq -3x^2 + 12x, \forall x \in (0; +\infty)$.

Xét $g(x) = -3x^2 + 12x$ trên $(0; +\infty)$.

$$g'(x) = -6x + 12.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		0	12	$-\infty$

Do đó: $\max_{(0; +\infty)} g(x) = 12 \Rightarrow m \geq \max_{(0; +\infty)} g(x) = 12$.

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$. Giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ là $\left[-\infty; \frac{b}{a}\right]$ với $\frac{b}{a}$ là phân số tối giản. Khi đó $T = 2a + b$ bằng

A. 19.

B. 14.

C. 13.

D. 17.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + (2-m)$.

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $y' = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 + 2(1-2m)x + (2-m) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{3x^2 + 2x + 2}{4x + 1}, \forall x \in (0; +\infty).$$

Xét $g(x) = \frac{3x^2 + 2x + 2}{4x + 1}$ trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{12x^2 + 6x - 6}{(4x + 1)^2}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = \frac{3x^2 + 2x + 2}{4x + 1}$ trên $(0; +\infty)$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	2	$\frac{5}{4}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x) \geq \frac{5}{4}, \forall x \in (0; +\infty)$.

Do đó $m \leq g(x), \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4}$ hay $m \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right]$.

Suy ra: $a = 4, b = 5$ nên $T = 2a + b = 13$.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = (x+m)^3 - 8(x+m)^2 + 16$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$?

A. 2.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 + 6mx + 3m^2 - 16x - 16m = 3x^2 + (6m - 16)x + 3m^2 - 16m$.

Có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m \\ x = \frac{16}{3} - m \end{cases}$ nên suy ra đồ thị hàm số nghịch biến trong khoảng

$\left(-m; \frac{16}{3} - m\right)$.

mà theo yêu cầu đề bài hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$ nên

$\Leftrightarrow (-1; 2) \subset \left(-m; \frac{16}{3} - m\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16}{3} - m \geq 2 \\ -m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{10}{3} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ đơn điệu trên khoảng $(1; 2)$?

A. 37.

B. 16.

C. 35.

D. 21.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 3x^2 - 3m$.

+ Nếu $3m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$ (1), khi đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số đơn điệu tăng trên khoảng $(1; 2)$. Suy ra: $m \leq 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $m > 0$ thì hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{m})$ và $(\sqrt{m}; +\infty)$ và hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\sqrt{m}; \sqrt{m})$.

* TH1: Hàm số đơn điệu tăng trên khoảng $(1; 2)$ khi $\sqrt{m} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$ (2).

* TH2: Hàm số đơn điệu giảm trên khoảng $(1; 2)$ khi $2 \leq \sqrt{m} \Leftrightarrow m \geq 4$ (3).

Kết hợp điều kiện (1), (2), (3) suy ra: $m \leq 1$ hoặc $m \geq 4$.

Đối chiếu điều kiện: $m \in (-20; 20)$ suy ra: $\begin{cases} -20 < m \leq 1 \\ 4 \leq m < 20 \end{cases}$

Do m là số nguyên nên $m \in \{-19; -18; \dots; -1; 0; 1; 4; \dots; 19\}$ (37 giá trị nguyên)

Câu 16. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x - 6m^3$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

A. $(-\infty; 1]$.

B. $(-\infty; 2]$.

C. $(-\infty; 0]$.

D. $[2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Tức là: $y' = 3x^2 - 6mx + 3 \geq 0; \forall x \in (0; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{2x} \geq m; \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \underset{(0; +\infty)}{\text{Min}} \left(\frac{x^2 + 1}{2x} \right)$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1(N) \vee x = -1(L).$$

$$\text{Lập BBT ta thấy } \underset{(0; +\infty)}{\text{Min}} \left(\frac{x^2 + 1}{2x} \right) = f(1) = 1.$$

N.C.Đ

Vậy $m \leq 1$ hay $m \in (-\infty; 1]$.

Câu 17. Tất cả giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 - (m+1)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ là

A. $m \geq 2$.

B. $m \leq \frac{11}{9}$.

C. $m \geq \frac{11}{9}$.

D. $m \leq 2$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

$$\text{Xét phương trình } y' = 3x^2 - 4mx - (m+1) = 0.$$

$$\Delta' = (2m)^2 + 3(m+1) = 4m^2 + 3m + 3 = \left(2m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{16} > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vậy } y' = 0 \text{ luôn có 2 nghiệm phân biệt } x_1 = \frac{2m - \sqrt{4m^2 + 3m + 3}}{3},$$

$$x_2 = \frac{2m + \sqrt{4m^2 + 3m + 3}}{3}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	0	2	x_2	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$					$+\infty$

Arrows from $f(x_1)$ and $f(x_2)$ point to the y axis at x_1 and x_2 respectively.

Để hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$ (I): $\begin{cases} x_1 \leq 0 \\ x_2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m - \sqrt{4m^2 + 3m + 3}}{3} \leq 0 \quad (1) \\ \frac{2m + \sqrt{4m^2 + 3m + 3}}{3} \geq 2 \quad (2) \end{cases}$.

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{4m^2 + 3m + 3} \geq 2m \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 0 \\ 4m^2 + 3m + 3 \geq 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 0 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{4m^2 + 3m + 3} \geq 6 - 2m \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 2m < 0 \\ 6 - 2m \geq 0 \\ 4m^2 + 3m + 3 \geq 36 - 24m + 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m \leq 3 \\ m \geq \frac{11}{9} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{11}{9}$.

Vậy (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ m \geq \frac{11}{9} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{11}{9}$. N.C.Đ

Cách 2:

$y' = 3x^2 - 4mx - (m+1).$

Hàm số nghịch biến trên $(0; 2) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (0; 2).$

$y' \leq 0, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow 3x^2 - 4mx - m - 1 \leq 0, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow m \geq \frac{3x^2 - 1}{4x + 1}, \forall x \in (0; 2).$

$\Leftrightarrow m \geq \max_{[0; 2]} f(x),$ trong đó $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{4x + 1}, x \in [0; 2].$

Ta có: $f'(x) = \frac{12x^2 + 6x + 4}{(4x + 1)^2} = \frac{12\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{13}{4}}{(4x + 1)^2} > 0, \forall x \in [0; 2].$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng $[0; 2]$

$\Rightarrow \max_{[0; 2]} f(x) = f(2) = \frac{3 \cdot 2^2 - 1}{4 \cdot 2 + 1} = \frac{11}{9}$

Vậy $m \geq \frac{11}{9}.$

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + 3m - 2$ đồng biến trên khoảng $(2; 5).$

A. $m \leq 1.$

B. $m \leq 5.$

C. $m < 5.$

D. $m < 1.$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + 3m - 2$ đồng biến trên khoảng $(2;5)$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0 \text{ với } \forall x \in (2;5)$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 4(m-1)x \geq 0 \text{ với } \forall x \in (2;5)$$

$$\Leftrightarrow 4x(x^2 - (m-1)) \geq 0 \text{ với } \forall x \in (2;5)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m-1) \geq 0 \text{ với } \forall x \in (2;5)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 \geq m \text{ với } \forall x \in (2;5)$$

Xét $g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = 2x + 1 > 0$ với $\forall x \in [2;5]$

$$\Rightarrow \min_{[2;5]} g(x) = g(2) = 5 \geq m.$$

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18.

B. 17.

C. 16.

D. 20.

Lời giải

Chọn A

Bảng biến thiên

N.C.Đ

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
			0	+

Ta có: $y' = (2x+3)f'(x^2+3x-m)$.

Vì $2x+3 > 0, \forall x \in (0;2)$. Do đó, để hàm số $y = f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

thì $f'(x^2+3x-m) \geq 0, \forall x \in (0;2)$ (*).

Đặt $t = x^2 + 3x - m$. Vì $x \in (0;2) \Rightarrow t \in (-m;10-m)$.

(*) trở thành: $f'(t) \geq 0, \forall t \in (-m;10-m)$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có: $\begin{cases} 10-m \leq -3 \\ 1 \leq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13 \leq m \leq 20 \\ -10 \leq m \leq -1 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\Rightarrow m \in \{-10; -9; \dots; -1; 3; 4; \dots; 20\}.$$

Câu 20. Số các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019;2019]$ để hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}$

đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 2034.

B. 2018.

C. 2025.

D. 2021.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{[2(m+1)x - 2m](x-1) - [(m+1)x^2 - 2mx + 6m]}{(x-1)^2} = \frac{(m+1)x^2 - 2(m+1)x - 4m}{(x-1)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{(m+1)x^2 - 2(m+1)x - 4m}{(x-1)^2} \geq 0, \forall x \geq 4.$$

$$\Leftrightarrow (m+1)x^2 - 2(m+1)x - 4m \geq 0, \forall x \geq 4 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 4)m + x^2 - 2x \geq 0, \forall x \geq 4.$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{-x^2 + 2x}{x^2 - 2x - 4}, \forall x \geq 4 \text{ (Do } x^2 - 2x + 4 > 0 \text{ với mọi } x \geq 4) \quad (*)$$

Đặt $g(x) = \frac{-x^2 + 2x}{x^2 - 2x - 4}$ có $g'(x) = \frac{8x - 8}{(x^2 - 2x - 4)^2} > 0, \forall x \geq 4$.

Bảng biến thiên:

x	4	$+\infty$
y'		+
y	-2	-1

Từ bảng biến thiên suy ra $(*) \Leftrightarrow m \geq -1$. **N.C.Đ**

Mà $m \in \mathbb{Z}; m \in [-2019; 2019] \Rightarrow m \in \{-1; 0; \dots; 2019\}$

$\Rightarrow$ Có 2021 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x + m\sqrt{x^2 + 2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 1 + m \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{\sqrt{x^2 + 2} + mx}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2} + mx \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \geq 0, & x = 0 \\ m \geq \frac{-\sqrt{x^2 + 2}}{x}, & \forall x > 0 \\ m \leq \frac{-\sqrt{x^2 + 2}}{x}, & \forall x < 0 \end{cases} \quad (*)$$

Xét $g(x) = \frac{-\sqrt{x^2 + 2}}{x}$ có $g'(x) = \frac{2}{x^2\sqrt{x^2 + 2}} > 0, \forall x \neq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	$+$	
y	1	$+\infty$	-1

Do đó, từ (*) suy ra $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$.

Có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $-1; 0; 1$.

Câu 22. Hàm số $y = \frac{2x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi?

A. $m \leq 0$.

B. $m < 0$.

C. $m \leq 2$.

D. $m < 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y' \geq 0, \forall x > 0 &\Leftrightarrow \frac{2-mx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \geq 0, \forall x > 0 \\ &\Leftrightarrow 2-mx \geq 0, \forall x > 0 \\ &\Leftrightarrow m \leq \frac{2}{x}, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \leq 0. \end{aligned}$$

Ta chọn đáp án A.

N.C.Đ

Câu 23. Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{2\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là

A. $m > 1$.

B. $m > \frac{1}{2}$.

C. $m \geq \frac{1}{2}$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\cos x = t$. Ta có $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$. Vì hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng

$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên yêu cầu bài toán tương đương với tìm tất cả các giá trị của m để hàm số

$$f(t) = \frac{2t-1}{t-m} \text{ nghịch biến trên khoảng } (0; 1) \Leftrightarrow y' = \frac{-2m+1}{(t-m)^2} < 0, \forall t \in (0; 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m+1 < 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

A. 2028.

B. 2018. **C.** 2020.

D. 2019.

Lời giải

Chọn D

$$y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1 \Leftrightarrow y = \sin^3 x + 3\sin^2 x - m\sin x - 4.$$

$$y' = (3\sin^2 x + 6\sin x - m)\cos x.$$

Hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 3\sin^2 x + 6\sin x - m \geq 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 x + 6\sin x \geq m \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = \sin x, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1).$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^2 + 6t$ trên $(0; 1)$ ta có bảng biến thiên sau

t	0	1
$f'(t)$		+
$f(t)$	0	6

Dựa vào bảng biến thiên ta có (1) xảy ra khi và chỉ khi $m \leq 0$.

Suy ra có 2019 giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 25. Gọi S là tập hợp các số thực m thỏa mãn hàm số $y = mx^4 + x^3 - (m+1)x^2 + 9x + 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Số phần tử của S là

A. 3

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$y' = 4mx^3 + 3x^2 - 2(m+1)x + 9$$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ tại hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

TH1: $m = 0, y' = 3x^2 - 2x + 9 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, Suy ra $m = 0$ thỏa mãn.

TH2: $m > 0$, ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y' = -\infty$. Suy ra hàm số $y = mx^4 + x^3 - (m+1)x^2 + 9x + 5$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

TH3: $m < 0$, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y' = -\infty$. Suy ra hàm số $y = mx^4 + x^3 - (m+1)x^2 + 9x + 5$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $S = \{0\}$, số phần tử của S là 1.

Câu 26. Cho hàm số $y = (2m-1)x - (3m+2)\cos x$. Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị hai phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của X bằng

A. -4.

B. -5.

C. -3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$y' = 2m - 1 + (3m + 2)\sin x$. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m - 1 + (3m + 2)\sin x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} (*)$$

Nếu $m = -\frac{2}{3}$ thì (*) không thỏa.

$$\text{Nếu } m > -\frac{2}{3} \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{1-2m}{3m+2}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1-2m}{3m+2} \geq 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m \leq -\frac{1}{5}.$$

$$\text{Nếu } m < -\frac{2}{3} \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1-2m}{3m+2}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1-2m}{3m+2} \leq -1 \Leftrightarrow -3 \leq m < -\frac{2}{3}.$$

Ta có $X = \{-3; -2; -1\}$.

Vậy $-3 - 1 = -4$.

Câu 27. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ là

A. $(-\infty; -\frac{8}{5})$.

B. $[-3; -\frac{8}{5}]$.

C. $(-\frac{8}{5}; +\infty)$.

D. $[-\frac{8}{5}; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 - 2mx - m - 1}{(x - m)^2}.$$

Hàm số xác định trên khoảng $(-\infty; -3) \Leftrightarrow m \notin (-\infty; -3) \Leftrightarrow m \geq -3$

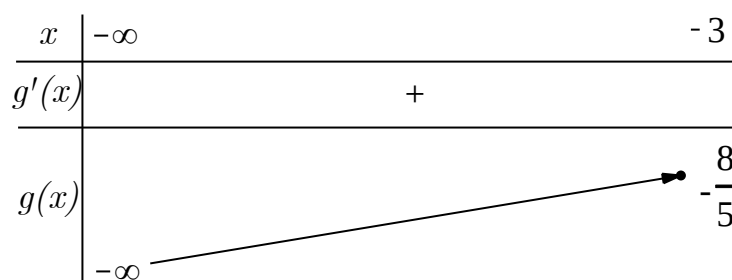
Khi đó để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ thì $y' \geq 0 \forall x \in (-\infty; -3)$.

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx - m - 1 \geq 0 \forall x \in (-\infty; -3) \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq m(2x + 1) \text{ với } \forall x \in (-\infty; -3).$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{2x + 1} \leq m \text{ với } \forall x \in (-\infty; -3).$$

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{x^2 - 1}{2x + 1} \text{ ta có } g'(x) = \frac{2x^2 + 2x + 2}{(2x + 1)^2} > 0 \text{ với } \forall x \in (-\infty; -3).$$

BBT



Vậy $m \geq -\frac{8}{5}$ (Thỏa mãn điều kiện $m \geq -3$).

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-19;19)$ để hàm số

$$y = \frac{\tan x - 3m + 3}{\tan x - m} \text{ đồng biến trên khoảng } \left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

A. 17.

B. 10.

C. 11.

D. 9.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t = \tan x$, khi x trong $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ thì t tăng trong $(0;1)$.

Do đó hàm số ban đầu đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ khi hàm số $y = \frac{t - 3m + 3}{t - m}$

đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Xét hàm số $y = \frac{t - 3m + 3}{t - m}$ có:

$$y' = \frac{2m - 3}{(t - m)^2}$$

Hàm số $y = \frac{t - 3m + 3}{t - m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi $\begin{cases} 2m - 3 > 0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$

Trong khoảng $(-19;19)$ có 17 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán!

N.C.Đ

Câu 29. Cho hàm số $y = -2\sin^3 x + 3\sin^2 x + 6(2m - 1)\sin x + 2019$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m thuộc khoảng $(-2016;2019)$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2019.

B. 2017.

C. 2021.

D. 2018.

Lời giải

Chọn B

$$y' = [-6\sin^2 x + 6\sin x + 6(2m - 1)]\cos x$$

$$\text{Ta có } \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right): \cos x < 0$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên khoảng } \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y' \leq 0 \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -6\sin^2 x + 6\sin x + 6(2m - 1) \geq 0 \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \sin x, \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (-1;1)$$

Điều kiện (1) trở thành tìm m thỏa mãn

$$-6t^2 + 6t + 6(2m - 1) \geq 0 \quad \forall t \in (-1;1)$$

$$\Leftrightarrow 2m - 1 \geq t^2 - t \quad \forall t \in (-1;1)$$

Xét hàm số nghịch biến trên khoảng $f(t) = t^2 - t, t \in (-1;1)$.

Ta có bảng biến thiên

t	-1	$\frac{1}{2}$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	2	$-\frac{1}{4}$	0

Ycbt $\Leftrightarrow 2m-1 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$ mà m thuộc khoảng $(-2016; 2019)$ nên có 2017 giá trị thỏa mãn.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số thực m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m-3$ đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1?

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m-3 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x + m-1$.

Nếu $\Delta_{y'} \leq 0$ thì hàm số luôn nghịch biến.

Nếu $\Delta_{y'} > 0$ thì hàm số đồng biến trên $[x_1, x_2]$ với x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Do vậy, hàm số đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1 khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| > 1$.

+) $\Delta_{y'} > 0 \Leftrightarrow 9 + 3(m-1) > 0 \Leftrightarrow m > -2$ (1)

+) Theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{m-1}{-3} \end{cases}$$

+) $|x_1 - x_2| > 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 > 1 \Leftrightarrow 4 + \frac{4(m-1)}{3} > 1 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $m > -\frac{5}{4}$ mà m nguyên âm do đó $m = -1$.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = m^2 x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

A. 7.

B. 16.

C. 15.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = m^2 x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1 \Rightarrow y' = 4m^2 x^3 - 4(4m-1)x$.

+ TH1: Nếu $m = 0$ thì $y' = 4x$.

BBT:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$y(0)$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$. Nhận $m = 0$.

+ TH2: Nếu $m \neq 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow [m^2x^2 - (4m-1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{4m-1}{m^2} \end{cases} (1)$.

* Nếu $4m-1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$ thì phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$.

Ta có $a = m^2 > 0, \forall m \neq 0$ khi đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$. Nhận các giá trị $m \leq \frac{1}{4}$.

Mà ta có $m \in (-10; 10), m \in \mathbb{Z}$ khi đó $\begin{cases} -10 < m \leq \frac{1}{4} \\ m \neq 0, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên có 9 giá trị của m thỏa mãn.

* Nếu $4m-1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$ thì $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt là $x = 0$ và

$$x = \pm \frac{\sqrt{4m-1}}{m}.$$

BBT:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{4m-1}}{m}$	0	$\frac{\sqrt{4m-1}}{m}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$y\left(-\frac{\sqrt{4m-1}}{m}\right)$	1	$y\left(\frac{\sqrt{4m-1}}{m}\right)$	$+\infty$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì $\frac{\sqrt{4m-1}}{m} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2-\sqrt{3} \\ m \geq 2+\sqrt{3} \end{cases}$.

Kết hợp với $m \in (-10; 10), m \in \mathbb{Z}$, ta có: $\begin{cases} -10 < m \leq 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} \leq m < 10 \end{cases} \Rightarrow$ do m nguyên nên có 16 giá

trị của m thỏa mãn.

Vậy có 16 giá trị m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Bổ sung cách 2 như sau:

Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty) \Leftrightarrow y' = 4m^2x^3 - 4(4m-1)x \geq 0, \forall x > 1$ và $y' = 0$ có nghiệm hữu hạn trên $(1; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow m^2x^2 - (4m-1) \geq 0, \forall x > 1 (*)$$

+ Với $m = 0$: $(*) \Leftrightarrow -(-1) \geq 0, \forall x > 1$ luôn đúng nên ta nhận $m = 0$.

$$+ \text{ Với } m \neq 0: (*) \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{4m-1}{m^2}, \forall x > 1 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{4m-1}{m^2} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 - \sqrt{3} \\ m \geq 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Tổng hợp các điều kiện và trường hợp ta có: $m \in \{-9, -8, \dots, 0, 4, 5, \dots, 9\}$. Vậy có 16 giá trị m .

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

N.C.Đ
Lời giải

Chọn A

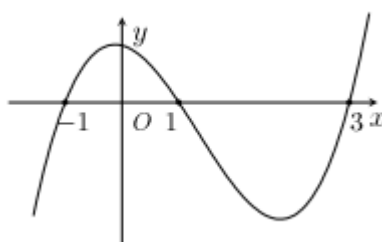
Từ giả thiết suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 1)$, $(1; 3)$ và liên tục tại $x = 1$ nên đồng biến trên $(-1; 3)$.

Ta có $g'(x) = f'(x+m)$ và $x \in (0; 2) \Leftrightarrow x+m \in (m; m+2)$.

$$g(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (0; 2) \Leftrightarrow (m; m+2) \subset (-1; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m+2 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên m có 3 giá trị là $m = -1; m = 0; m = 1$.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



A. 4.

B. 3.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = f'(x+m)$. Vì $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x) = f'(x+m)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x+m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+m < -1 \\ 1 < x+m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1-m \\ 1-m < x < 3-m \end{cases}.$$

Hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq -1-m \\ 3-m \geq 2 \\ 1-m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}.$$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-5; 5]$ nên ta có $S = \{-5; -4; -3; 0; 1\}$.

Vậy S có 5 phần tử.

Câu 34. Cho hàm số $y = \frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10; 10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8; 5)$?

A. 14.

B. 13.

C. 12.

D. 15.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{6-x}$, ($t \geq 0$) khi đó ta có hàm số $y = f(t) = \frac{(4-m)t+3}{t+m}$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{-m^2+4m-3}{(t+m)^2}.$$

Hàm số $y = \sqrt{6-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 6)$ nên với $-8 < x < 5$ thì $1 < t < \sqrt{14}$.

Hàm số $y = \frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$ đồng biến trên khoảng $(-8; 5)$ khi và chỉ khi hàm số

$$f(t) = \frac{(4-m)t+3}{t+m} \text{ nghịch biến trên khoảng } (1; \sqrt{14}) \Leftrightarrow f'(t) < 0, \forall t \in (1; \sqrt{14})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+4m-3 < 0 \\ -m \notin (1; \sqrt{14}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 3 \\ m \geq -1 \\ m \leq -\sqrt{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -1 \leq m < 1. \\ m \leq -\sqrt{14} \end{cases}.$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ nên $m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -1; 0; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Vậy có 14 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $f(0) = f(1) = f(2)$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của c để hàm số $g(x) = f(f(x^2+2))$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ là

A. 1.

B. $1-\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $1+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) = c \\ f(1) = a + b + c + \frac{1}{6} \\ f(2) = 4a + 2b + c + \frac{4}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Theo giả thiết } f(0) = f(1) = f(2) \Rightarrow \begin{cases} a + b = -\frac{1}{6} \\ 4a + 2b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + c.$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$ khi $g'(x) = 2xf'(x^2+2)f'[f(x^2+2)] \leq 0, \forall x \in (0;1)$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{3} \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ta thấy } \forall x \in (0;1) \text{ thì } \begin{cases} 2x > 0 \\ f'(x^2+2) > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \forall x \in (0;1), g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'[f(x^2+2)] \leq 0$$

Xét $0 < x < 1 \Rightarrow 2 < x^2 + 2 < 3$, vì $f'(x) > 0, \forall x \in (2;3)$ nên $f(x)$ đồng biến trên $(2;3)$.

$$\text{Do đó: } f(2) < f(x^2+2) < f(3).$$

$$\text{Suy ra } 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \leq f(2) < f(3) \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) \geq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ f(3) \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \leq c \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } \min c + \max c = 1.$$

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} - \frac{mx^3}{3} + \frac{x^2}{2} - mx + 2019$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$. Tính số phần tử của S biết rằng $|m| \leq 2020$.

A. 4041.

B. 2027.

C. 2026.

D. 2015.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (6; +\infty)$.

$$y' = x^3 - mx^2 + x - m = x^3 - m(x^2 + 1) + x \geq 0, \forall x \in (6; +\infty).$$

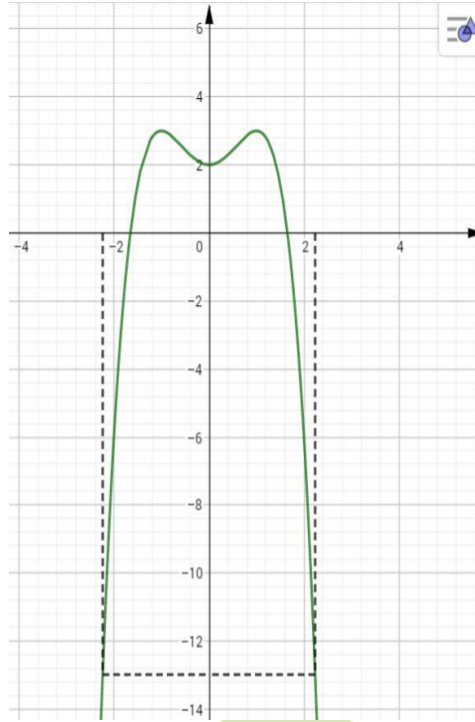
$$\Leftrightarrow m \leq \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = x, \forall x \in (6; +\infty).$$

$$\text{Đặt } f(x) = x \text{ thì } m \leq f(x), \forall x \in (6; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \min f(x), \forall x \in (6; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow m \leq 6.$$

Mà $|m| \leq 2020$ nên $m \in \{-2020; -2019; \dots, 6\}$, có 2027 phần tử. Ta chọn B.

Câu 37. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m + 6\sqrt{5}$ với m là số thực. Điều kiện cần và đủ để $g(x) \leq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ là

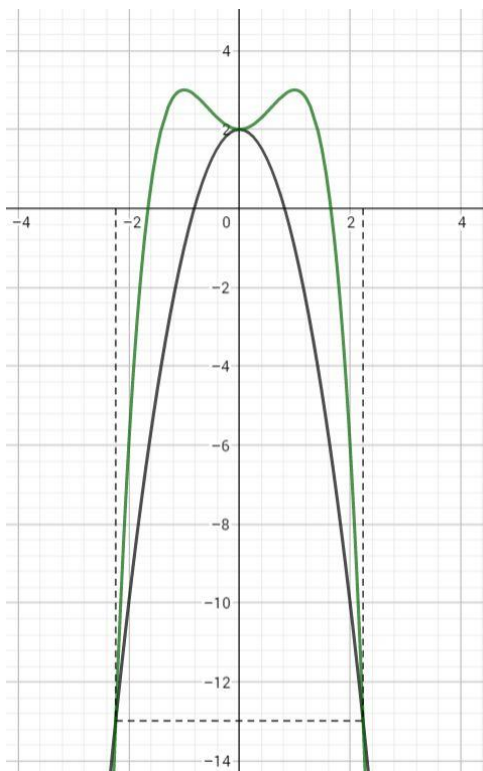
- A. $m \leq \frac{2}{3} f(\sqrt{5})$ B. $m \geq \frac{2}{3} f(\sqrt{5})$ C. $m \geq \frac{2}{3} f(-\sqrt{5})$ D. $m \geq \frac{2}{3} f(0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2f'(x) + 6x^2 - 4$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3x^2 + 2 = h(x).$$



Dựa vào đồ thị rõ ràng $f'(x) \geq h(x)$, $\forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$. Suy ra $g'(x) \geq 0$, $\forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

Do đó, $g(x)$ đồng biến với mọi $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$. Khi đó,

$$g(x) \leq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$$

N.C.Đ

$$\Leftrightarrow \max_{x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \max_{x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} g(x) = g(5) = 2f(\sqrt{5}) - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3} f(\sqrt{5}).$$

Câu 38. Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = (m^3 - 3m)x^4 + m^2x^3 - mx^2 + x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. 3.

B. 1.

C. Vô số.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\bullet \text{ TH1: } m^3 - 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm\sqrt{3} \end{cases}.$$

+) Với $m = 0$ thì hàm số đã cho trở thành $y = x + 1$, hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $m = 0$ thỏa mãn.

+) Với $m = \sqrt{3}$ thì hàm số đã cho trở thành $y = 3x^3 - \sqrt{3}x^2 + x + 1$ có $y' = 9x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 > 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $m = \sqrt{3}$ thỏa mãn.

+) Với $m = -\sqrt{3}$ thì hàm số đã cho trở thành $y = 3x^3 + \sqrt{3}x^2 + x + 1$ có $y' = 9x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 > 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $m = -\sqrt{3}$ thỏa mãn.

$$\bullet \text{ TH2: } m^3 - 3m \neq 0. \text{ Ta có: } y' = 4(m^3 - 3m)x^3 + 3m^2x^2 - 2mx + 1.$$

Nhận thấy, với $m^3 - 3m \neq 0$ thì y' là hàm số bậc ba nên phương trình $y' = 0$ có ít nhất 1 nghiệm và y' đổi dấu khi qua nghiệm đó.

Suy ra hàm số đã cho không đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn là 0 ; $\sqrt{3}$ và $-\sqrt{3}$.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $y = \ln(x^2 + 2) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2019.

B. 2020.

C. 4038.

D. 1009.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = \frac{2x}{x^2 + 2} - m$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 2} - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \frac{2x}{x^2 + 2} = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$ trên $\mathbb{R}$.

$g'(x) = \frac{4 - 2x^2}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
y'		-	0	+	0	-
y	0				$\frac{\sqrt{2}}{2}$	

Diagram illustrating the behavior of the function y as x approaches the boundaries of the domain $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$:

- As $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow 0$.
- As $x \rightarrow -\sqrt{2}$, $y \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- As $x \rightarrow \sqrt{2}$, $y \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- As $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 0$.

Do $m \leq g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \min_{\mathbb{R}} g(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. Vì $m \in [-2019; 2019]$ nên các giá trị m thỏa mãn là $m \in \{-2019; -2018, \dots, -2; -1\}$. Vậy có 2019 giá trị m thỏa mãn.

Câu 40 Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 12.

B. 0.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$\Leftrightarrow -m \leq 3x^2 + \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty)$

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^6}$ với $x \in (0; +\infty)$. Ta có

$$3x^2 + \frac{1}{x^6} = x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x^6} \geq 4\sqrt[4]{x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^6}} = 4, \text{ dấu bằng xảy ra khi } x = 1 \text{ nên}$$

$$\min_{(0; +\infty)} g(x) = 4.$$

Mặt khác, ta có $-m \leq 3x^2 + \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow -m \leq \min_{(0; +\infty)} g(x) \Leftrightarrow -m \leq 4 \Leftrightarrow m \geq -4$.

Vậy có 4 giá trị nguyên âm của m là $-1; -2; -3; -4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$f(x) = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\frac{3}{2}$.

B. -2 .

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = m^2x^4 - mx^2 + 20x - (m^2 - m - 20)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = m^2x^4 - mx^2 + 20x - (m^2 - m - 20) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} (*)$.

Ta có $f'(-1) = 0$ nên $f'(x) = (x+1)[m^2x^3 - m^2x^2 + (m^2 - m)x - m^2 + m + 20] = (x+1)g(x)$.

Nếu $x = -1$ không phải là nghiệm của $g(x)$ thì $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua -1 , suy ra $f(x)$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó điều kiện cần để $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là $g(-1) = 0$

$$g(-1) = 0 \Leftrightarrow -4m^2 + 2m + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Với $m = -2 \Rightarrow f'(x) = (x+1)(4x^3 - 4x^2 + 6x + 14) = (x+1)^2(4x^2 - 8x + 14) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, do đó $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $m = -2$ thỏa mãn.

Với $m = \frac{5}{2} \Rightarrow f'(x) = (x+1)\left(\frac{25x^3}{4} - \frac{25x^2}{4} + \frac{15x}{4} + \frac{65}{4}\right) = \frac{(x+1)^2(25x^2 - 50x + 65)}{4} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, do đó $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $m = \frac{5}{2}$ thỏa mãn.

Từ đó $S = \left\{-2; \frac{5}{2}\right\}$, suy ra tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng $-2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$. Với giá trị nào của m thì $f'(x) - 6x > 0$ với mọi $x \geq 2$?

A. $m > \frac{1}{2}$.

B. $m < -\frac{1}{2}$.

C. $m > 1$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f' x = 3x^2 - 6mx + 3 - 2m - 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Cách 1:

$$f' x - 6x > 0, \forall x \geq 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3 - 2m - 1 - 6x > 0, \forall x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2m + 1x + 2m + 1 > 0, \forall x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ \Delta \geq 0 \\ x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2 < 0 \\ m^2 + 2 \geq 0 \\ -2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}.$$

Với $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2m + 1x + 2m + 1 = 0$

Lưu ý:

Đặt $g x = x^2 - 2m + 1x + 2m + 1$. Ta có $g x$ là một tam thức bậc hai có hệ số $a > 0$

Nếu $\Delta < 0$ thì $g x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g x > 0, \forall x \geq 2$

Nếu $\Delta \geq 0$ và $g x = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ sao cho $x_1 \leq x_2 < 2$ thì theo định lí dấu tam thức bậc hai ta có $g x > 0, \forall x \geq 2$. **N.C.Đ**

Cách 2.

$$f' x - 6x > 0, \forall x \geq 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3 - 2m - 1 - 6x > 0, \forall x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2m x - 1 - 2x - 1 > 0, \forall x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{x^2 - 2x - 1}{2(x-1)}, \forall x \geq 2 \Leftrightarrow m < \min_{2; +\infty} g x \text{ với } g(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{2x - 1}$$

$$\text{Vì } g' x = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x - 1} > 0, \forall x \geq 2 \text{ nên } \min_{2; +\infty} g x = g 2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } m < -\frac{1}{2}.$$

Câu 43. Cho hàm số $f x = x^3 - 2m - 1x^2 + 2 - m x + 2$. Với giá trị nào của tham số m thì $f' x > 0$ với mọi $x \geq -1$?

A. $m \in \left(-\frac{7}{3}; +\infty\right)$

B. $m \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$

C. $m \in \left(-\frac{7}{3}; \frac{5}{4}\right)$

D. $m \in \left(-\frac{7}{3}; -1\right) \cup \left(-1; \frac{5}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f' x = 3x^2 - 2 - 2m - 1x + 2 - m, \forall x \in \mathbb{R}$

$f' x$ là một tam thức bậc hai có hệ số $a > 0$

Nếu $\Delta < 0$ thì $f' x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f' x > 0, \forall x \geq -1$.

Nếu $\Delta \geq 0$ và $f'x = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ sao cho $x_1 < x_2 < -1$ thì theo định lí dấu tam thức bậc hai ta có $f'x > 0, \forall x \geq -1$.

$$f'x > 0, \forall x \geq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ x_1 + 1 \quad x_2 + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 < 0 \\ 4m^2 - m - 5 \geq 0 \\ 3m + 7 > 0 \\ 2m - 1 < -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < \frac{5}{4} \\ m \leq -1 \vee m \geq \frac{5}{4} \\ m > -\frac{7}{3} \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < \frac{5}{4} \\ -\frac{7}{3} < m < -1 \end{cases}$$

Vậy $m \in \left(-\frac{7}{3}; -1\right) \cup \left(-1; \frac{5}{4}\right)$.

Sai lầm của học sinh dùng cách hàm số:

$$f'x > 0, \forall x \geq -1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 2 - m > 0, \forall x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{3x^2 + 2x + 2}{4x + 1}, \forall x \geq -1$$

N.C.Đ

$$\Leftrightarrow m < \min_{-1; +\infty} g(x) \text{ với } g(x) = \frac{3x^2 + 2x + 2}{4x + 1}.$$

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (2m - 2019)x - (2018 - m)\cos^2 x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m \leq 1$.

B. $m \leq \frac{4037}{3}$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \geq -1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 2m - 2019 + (2018 - m)\sin 2x$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 2m - 2019 + (2018 - m)\sin 2x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow (2018 - m)\sin 2x \leq 2019 - 2m, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \max_{\mathbb{R}} g(x) \leq 2019 - 2m \quad (1), \text{ Với } g(x) = (2018 - m)\sin 2x.$$

Trường hợp 1: $2018 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2018$ thì $y' = 2017 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $m = 2018$ không là giá trị cần tìm.

Trường hợp 2: $2018 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2018$.

$$\max_{\mathbb{R}} g(x) = 2018 - m.$$

$$(1) \Leftrightarrow 2018 - m \leq 2019 - 2m \Leftrightarrow m \leq 1 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Trường hợp 3: $2018 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2018$.

$$\max_{\mathbb{R}} g(x) = m - 2018.$$

$$(1) \Leftrightarrow m - 2018 \leq 2019 - 2m \Leftrightarrow m \leq \frac{4037}{3} \text{ (loại).}$$

Kết luận: $m \leq 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để hàm số $y = |2x^3 - 2mx + 3|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

A. 12.

B. 8.

C. 11.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $f(x) = 2x^3 - 2mx + 3$ có: $f'(x) = 6x^2 - 2m$; $\Delta' = 12m$

Đồ thị hàm số $y = |f(x)| = |2x^3 - 2mx + 3|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C) bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên Ox .

- Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox và bỏ phần đồ thị (C) nằm dưới Ox .

+ **Trường hợp 1:** $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$. Suy ra $f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$.

$$\text{Vậy yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 5 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-10; 10)$ ta được

$m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$. Ta có 10 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán (1)

+ **Trường hợp 2:** $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 0$. Suy ra $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

$$\text{Vậy yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x_1 < x_2 \leq 1 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\frac{2m}{6} + 1 \geq 0 \\ 5 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{5}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-10; 10)$ ta được $m \in \{1; 2\}$. Ta có 2 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán (2).

Từ (1) và (2) suy ra: có tất cả có 12 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A. 2012.

B. 2009.

C. 2011.

D. 2010.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(1-x) = -(1-x)^2(-x-1)\left[(1-x)^2-6(1-x)+m\right] \\ &= (x-1)^2(x+1)(x^2+4x+m-5). \end{aligned}$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x < -1 \quad (*), \text{ (dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm).}$$

Với $x < -1$ thì $(x-1)^2 > 0$ và $x+1 < 0$ nên $(*) \Leftrightarrow x^2+4x+m-5 \geq 0, \forall x < -1$

$$\Leftrightarrow m \geq -x^2-4x+5, \forall x < -1.$$

Xét hàm số $y = -x^2-4x+5$ trên khoảng $(-\infty; -1)$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1
y	$-\infty$	9	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m \geq 9$.

Kết hợp với m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ và m nguyên nên $m \in \{9; 10; 11; \dots; 2019\}$.

Vậy có 2011 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x^2+mx+5)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x) = f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } g'(x) = (2x+1) \cdot f'(x^2+x-2).$$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow f'(x^2+x-2) \geq 0 \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2(x^2+x)\left[(x^2+x-2)^2+m(x^2+x-2)+5\right] \geq 0 \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2+m(x^2+x-2)+5 \geq 0 \quad (1) \quad \forall x \in (1; +\infty).$$

$$\text{Đặt } t = x^2+x-2, x \in (1; +\infty) \Rightarrow t > 0.$$

$$\text{Khi đó (1) trở thành } t^2+mt+5 \geq 0 \quad \forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow t+\frac{5}{t} \geq -m \quad (2) \quad \forall t \in (0; +\infty)$$

$$\text{Để (1) nghiệm đúng với mọi } x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow (2) \text{ nghiệm đúng với mọi } t \in (0; +\infty).$$

Ta có $h(t) = t + \frac{5}{t} \geq 2\sqrt{5}$ với $\forall t \in (0; +\infty)$. Dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{5}{t} \Leftrightarrow t = \sqrt{5}$.

Suy ra $\min_{t \in (0; +\infty)} (h(t)) = 2\sqrt{5}$.

Vậy (2) nghiệm đúng với mọi $t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow -m \leq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow m \geq -2\sqrt{5}$.

KL: Số giá trị nguyên âm của m là 4.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^3(x^2 - 4x + m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$?

A. 2020.

B. 2014.

C. 2019.

D. 2016.

Lời giải

Chọn D

• Ta có: $g(x) = f(1-x)$

$$\Rightarrow g'(x) = (1-x)' \cdot f'(1-x) = (-1) \cdot (1-x) \left[(1-x)-1 \right]^3 \left[(1-x)^2 - 4(1-x) + m \right]$$

$$\Rightarrow g'(x) = -x^3(x-1)(x^2 + 2x + m - 3)$$

$$\bullet \text{ Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x^2 + 2x + m - 3 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{N.C.Đ}$$

Phương trình (1) có $\Delta' = 4 - m$

Trường hợp 1: Nếu $4 - m < 0 \Leftrightarrow m > 4$ thì phương trình (1) vô nghiệm;

$x^2 + 2x + m - 3 > 0, \forall x$ ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ nên $m > 4$ thỏa mãn ycbt.

Trường hợp 2: Nếu $m = 4$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x = -1$.

Khi đó $g'(x) = -x^3(x-1)(x+1)^2$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ nên $m = 4$ thỏa mãn ycbt.

Trường hợp 3: Nếu $m < 4$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)

Mà $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2$ nên tồn tại ít nhất 1 nghiệm x_1 thuộc khoảng $(-\infty; 0)$

Khi đó $g'(x)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm x_1 nên hàm số không thể nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. Suy ra $m < 4$ không thỏa mãn ycbt.

• Kết hợp 3 trường hợp ta được: $m \geq 4$.

Do m là số nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ nên $m \in \{4; 5; 6; \dots; 2019\}$

Vậy có 2016 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = f(3x-1) + x^3 - 3mx$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$?

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	-4	0	4	0	$+\infty$

A. 8.

B. 6.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Để hàm số $y = f(3x-1) + x^3 - 3mx$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-2; 1)$$

$$\Leftrightarrow 3f'(3x-1) + 3x^2 - 3m \geq 0, \forall x \in (-2; 1)$$

$$\Leftrightarrow m \leq f'(3x-1) + x^2, \forall x \in (-2; 1) \quad (*)$$

Đặt $k(x) = f'(3x-1)$, $h(x) = x^2$ và $g(x) = f'(3x-1) + x^2 = k(x) + h(x)$

Ta có $\min_{(-2; 1)} h(x) = h(0) = 0$

Từ bảng biến thiên suy ra: $\min_{(-2; 1)} f'(x) = f'(-1) = -4$.

Do đó ta có: $\min_{(-2; 1)} f'(3x-1) = f'(-1) = -4$ khi $3x-1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$

$$\Rightarrow \min_{(-2; 1)} k(x) = k(0) = -4$$

Do đó $\min_{(-2; 1)} g(x) = g(0) = k(0) + h(0) = 0 - 4 = -4$

Từ (*) ta có $m \leq f'(3x-1) + x^2, \forall x \in (-2; 1) \Leftrightarrow m \leq \min_{(-2; 1)} g(x) \Leftrightarrow m \leq -4$

Mà $m \in (-10; 10) \Rightarrow m \in \{-9, \dots, -4\}$

Vậy có tất cả 6 số nguyên thỏa mãn.

Câu 50. Giá trị $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^4(x^2 + mx + 9)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$?

A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = (3-x)' f'(3-x) = -f'(3-x)$.

Hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (3; +\infty)$ hay $f'(3-x) \leq 0, \forall x \in (3; +\infty)$. (Dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $(3; +\infty)$)

$$f'(3-x) = (3-x)(2-x)^4 [(3-x)^2 + m(3-x) + 9] \leq 0, \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow (3-x)(2-x)^4 [(3-x)^2 + m(3-x) + 9] \leq 0, \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow (3-x)^2 + m(3-x) + 9 \geq 0, \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{9+(x-3)^2}{x-3}, \forall x \in (3; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{(3; +\infty)} h(x) \text{ với } h(x) = \frac{9+(x-3)^2}{x-3} \Rightarrow h'(x) = \frac{-9}{(x-3)^2} + 1 = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}.$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (3; +\infty) \\ x = 6 \in (3; +\infty) \end{cases}. \text{ Ta có bảng biến thiên:}$$

x	3	6	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$		6	$+\infty$

$$\Rightarrow \min_{(3; +\infty)} h(x) = h(6) = 6. \text{ Ta có } \begin{cases} m \in \mathbb{Z}^+ \\ m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Vậy có 6 số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$	-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	-	0	+

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(x^2 + 4x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = f(x^2 + 4x + m)$.

Ta có: $y' = (2x + 4) f'(x^2 + 4x + m)$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1) \Leftrightarrow y' = (2x + 4) f'(x^2 + 4x + m) \leq 0, \forall x \in (-1; 1)$

(chú ý rằng $2x + 4 > 0, \forall x \in (-1; 1)$)

$$\Leftrightarrow f'(x^2 + 4x + m) \leq 0, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow -2 \leq x^2 + 4x + m \leq 8, \forall x \in (-1; 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq g(x) = -x^2 - 4x - 2 \\ m \leq h(x) = -x^2 - 4x + 8 \end{cases}, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{[-1; 1]} g(x) = g(-1) = 1 \\ m \leq \min_{[-1; 1]} h(x) = h(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$$

(do hàm số $y = -x^2 - 4x + c$ có $y' = -2x - 4 < 0, \forall x \in (-1; 1)$).

Câu 52. Tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(3x - 1) - \frac{m}{x} + 2$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

A. $\left(-\frac{7}{3}; +\infty\right)$.

B. $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

C. $\left(-\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

D. $\left(\frac{2}{9}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = \ln(3x - 1) - \frac{m}{x} + 2$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $y' = \frac{3}{3x - 1} + \frac{m}{x^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow y' = \frac{3}{3x - 1} + \frac{m}{x^2} \geq 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

$\Leftrightarrow m \geq \frac{3x^2}{1 - 3x}, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow m \geq \max_{\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)} \left(\frac{3x^2}{1 - 3x}\right)$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{3x^2}{1 - 3x}, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $f'(x) = \frac{3x(2 - 3x)}{(1 - 3x)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \\ x = \frac{2}{3} \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases}$.

Ta có $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}; f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \max_{\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)} f(x) = -\frac{4}{3}$. Vậy $m > -\frac{4}{3}$.

Câu 53. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(a; b)$ để hàm số $f(x) = x + a \sin x + b \cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì điều kiện là $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f'(x) = 1 + a \cos x - b \sin x$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + a \cos x - b \sin x \geq 0$$

$$\Rightarrow a \cos x - b \sin x \geq -1$$

$$TH1: a = 0, b = 0. (TM)$$

$$TH2: \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

$$1 + a \cos x - b \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \geq \frac{-1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow \exists \alpha: \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha - x) \geq \frac{-1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

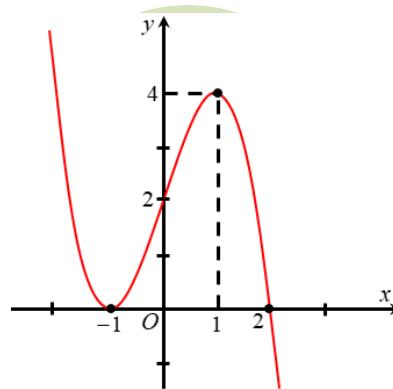
$$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin(\alpha - x) \geq \frac{-1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq -1$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \leq 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 1$$

Do a, b nguyên nên $(a; b) \in \{(\pm 1; 0), (0; \pm 1)\}$

Vậy theo cả hai trường hợp ta có tất cả 5 bộ giá trị $(a; b)$

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x+1) + \frac{20}{m} \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?



A. 3.

B. 6.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = f'(x+1) + \frac{20}{m} \cdot \frac{-4}{4-x^2}.$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ khi $y' \leq 0, \forall x \in (-1; 1)$

$$\Rightarrow f'(x+1) - \frac{80}{m} \cdot \frac{1}{4-x^2} \leq 0, \forall x \in (-1; 1) \quad (*).$$

Đặt $t = x+1$ khi đó $x \in (-1; 1)$ suy ra $t \in (0; 2)$.

$$\text{Từ } (*) \text{ ta có } f'(t) - \frac{80}{m} \cdot \frac{1}{(3-t)(t+1)} \leq 0, \forall t \in (0; 2) \Rightarrow \frac{80}{m} \geq f'(t) \cdot (3-t)(t+1), \forall t \in (0; 2) \quad (1).$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ thì ta có $f'(x) = -(x+1)^2(x-2)$.

$$\text{Suy ra ta có } f'(t) = -(t+1)^2(t-2).$$

Xét hàm số $g(t) = -(t+1)^2(t-2)(3-t)(t+1)$, $\forall t \in (0; 2)$.

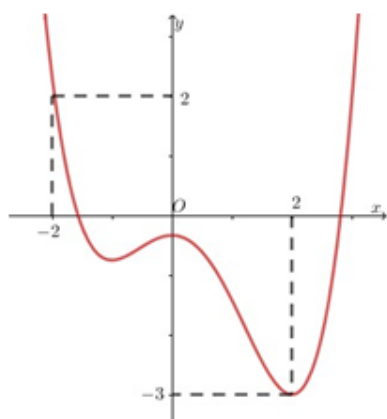
$$g'(t) = -(t+1)^2(-5t^2 + 18t - 13); g'(t) = 0 \Leftrightarrow -(t+1)^2(-5t^2 + 18t - 13) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{13}{5} \\ t = 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

t	0	1	2
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$		$g(1)$	

Dựa vào bảng xét dấu và từ (1) ta có $\frac{80}{m} \geq \max_{(0;2)} g(t) = g(1) \Leftrightarrow \frac{80}{m} \geq 16 \Leftrightarrow m \leq 5$.

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



N.C.Đ

Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của $m \in (-20; 20)$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^3}{4}\right) - \frac{m(x^2 + 4)^2}{20}$

đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. 6.

B. 7.

C. 17.

D. 18.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{3x^2}{4} \cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right) - \frac{m(x^2 + 4)}{5}.$$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0$, $\forall x \in (0; +\infty)$ ($g'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm). Điều này tương đương với

$$\frac{3x}{4} \cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right) \geq \frac{m(x^2 + 4)}{5} \Leftrightarrow m \leq \frac{15x}{4(x^2 + 4)} \cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right), \forall x \in (0; +\infty).$$

Với $x > 0$ thì $\frac{x^3}{4} > 0 \Rightarrow f'\left(\frac{x^3}{4}\right) \geq -3$. Đẳng thức xảy ra khi $\frac{x^3}{4} = 2 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có $0 < \frac{x}{x^2 + 4} \leq \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$, $\forall x > 0$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 2$.

Suy ra $\frac{15x}{4(x^2+4)} \cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right) \geq \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-3) = -\frac{45}{16}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 2$.

Như thế, $m \leq -\frac{45}{16}$. Kết hợp với m nguyên âm và $m \in (-20; 20)$ thì $m \in \{-19; -18; \dots; -3\}$.

Vậy có 17 số nguyên âm của $m \in (-20; 20)$ để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

N.C.Đ

CHỦ ĐỀ: HÀM SỐ ĐƠN ĐIỀU
VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 3.1

BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Kiến thức quan trọng 1: Dùng tính đơn điệu để giải phương trình.

Phương pháp :

- ❶ Phương trình : $f(x) = c$ có nhiều nhất một nghiệm nếu $f(x)$ đơn điệu trên toàn bộ tập xác định.
- ❷ Phương trình : $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm nếu hai hàm số $f(x), g(x)$ có tính đơn điệu trái ngược nhau.
- ❸ Phương trình : $f[u(x)] = f[v(x)] \Leftrightarrow u(x) = v(x)$ nếu f đơn điệu trên miền xác định.

Kiến thức quan trọng 2: Dùng tính đơn điệu để giải bất phương trình.

Phương pháp :

- ❶ Bất phương trình : $f(x) > c = f(x_0) \Leftrightarrow x > x_0$ nếu $f(x)$ đồng biến trên toàn bộ tập xác định và $f(x) > c = f(x_0) \Leftrightarrow x < x_0$ nếu $f(x)$ nghịch biến trên toàn bộ tập xác định
- ❷ Bất phương trình : $f(x) > g(x)$ và số x_0 thỏa $f(x_0) = g(x_0)$:
+ Có nghiệm $x > x_0$ nếu $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến.
+ Có nghiệm $x < x_0$ nếu $f(x)$ nghịch biến và $g(x)$ đồng biến.
- ❸ Bất phương trình : $f[u(x)] > f[v(x)] \Leftrightarrow u(x) > v(x)$ nếu f đồng biến trên miền xác định và $f[u(x)] > f[v(x)] \Leftrightarrow u(x) < v(x)$ nếu f nghịch biến trên miền xác định.

Bài toán 1: Biện luận số nghiệm phương trình $h(m) = f(x)$.

Phương pháp :

- + Tìm miền giá trị của hàm số $f(x)$ là $(a; b)$.
- + Phương trình có nghiệm khi $a < h(m) < b$.

Bài toán 2: Biện luận số nghiệm bất phương trình $h(m) \geq f(x)$ hoặc $h(m) \leq f(x)$.

Phương pháp :

- ❶ $m \geq f(x) \quad \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow m \geq \max_{[a; b]} f(x)$.

- ❷ $m \leq f(x) \quad \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow m \leq \min_{[a; b]} f(x).$
- ❸ $m \geq f(x)$ có nghiệm trên $[a; b] \Leftrightarrow m \geq \min_{[a; b]} f(x).$
- ❹ $m \leq f(x)$ có nghiệm trên $[a; b] \Leftrightarrow m \leq \max_{[a; b]} f(x).$

Bài toán 3: Tìm tham số m để phương trình $h(m) = f(x)$ có nghiệm $x \in (a; b)$.

Phương pháp :

+ Giả sử $f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ và $f(a) < f(b)$.

+ Phương trình có nghiệm $x \in (a; b)$ thì $f(a) < h(m) < f(b)$.

BÀI TẬP

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^3 - 3x^2 - 9x - m = 0$ có đúng 1 nghiệm?

- A.** $-27 \leq m \leq 5$. **B.** $m < -5$ hoặc $m > 27$.
C. $m < -27$ hoặc $m > 5$. **D.** $-5 \leq m \leq 27$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm thực?

- A.** $m \geq 2$. **B.** $m \leq 2$. **C.** $m \geq 3$. **D.** $m \leq 3$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = m + 4x - x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

- A.** $1 \leq m \leq 3$. **B.** $-3 < m < \sqrt{5}$. **C.** $-\sqrt{5} < m < 3$. **D.** $-3 \leq m < 3$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m+1 \geq 0$?

- A.** $m \leq -1$. **B.** $m \leq -\frac{4}{7}$. **C.** $m \geq -\frac{4}{7}$. **D.** $m \geq -1$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình:
 $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$?

- A.** $-1 \leq m \leq 3$. **B.** $0 \leq m \leq 2$. **C.** $0 \leq m \leq 3$. **D.** $-1 \leq m \leq 2$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm thực?

- A.** $m \geq -\frac{7}{2}$. **B.** $m \geq \frac{3}{2}$. **C.** $m \geq \frac{9}{2}$. **D.** $\forall m \in \mathbb{R}$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-1}$ có hai nghiệm thực?

- A.** $\frac{1}{3} \leq m < 1$. **B.** $-1 \leq m \leq \frac{1}{4}$. **C.** $-2 < m \leq \frac{1}{3}$. **D.** $0 \leq m < \frac{1}{3}$.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{(1+2x)(3-x)} > m+2x^2-5x-3$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$?

A. $m > 1$. B. $m > 0$. C. $m < 1$. D. $m < 0$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $3(\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}) - 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$?

A. $m \leq 6$. B. $m \geq 6$. C. $m \geq 6\sqrt{2} - 4$. D. $m \leq 6\sqrt{2} - 4$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \leq m^2 - m + 1$ nghiệm đúng $\forall x \in [-3, 6]$?

A. $m \geq -1$. B. $-1 \leq m \leq 0$.
C. $0 \leq m \leq 2$. D. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 2$.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m.4^x + (m-1).2^{x+2} + m - 1 > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m \leq 3$. B. $m \geq 1$. C. $-1 \leq m \leq 4$. D. $m \geq 0$.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $-x^3 + 3mx - 2 < -\frac{1}{x^3}$ nghiệm đúng $\forall x \geq 1$?

A. $m < \frac{2}{3}$. B. $m \geq \frac{2}{3}$. C. $m \geq \frac{3}{2}$. D. $-\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Câu 13. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình $2^{\cos^2 x} + 3^{\sin^2 x} \geq m.3^{\cos^2 x}$ có nghiệm?

A. $m = 4$. B. $m = 8$. C. $m = 12$. D. $m = 16$.

Câu 14. Bất phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} \geq 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a; b]$. Hỏi tổng $a + b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. -2. B. 4. C. 5. D. 3.

Câu 15. Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 6x + 11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$ có tập nghiệm $(a; b]$. Hỏi hiệu $b - a$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1. B. 2. C. 3. D. -1.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \text{ có nghiệm.}$$

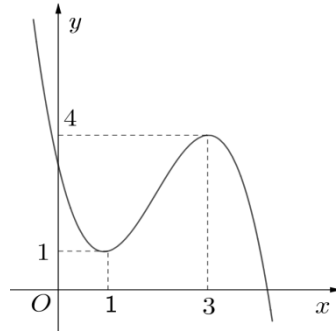
A. $m \leq \sqrt{2} - 1$. B. $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$. C. $m \geq 1$. D. $m \leq 1$.

Câu 17. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt

$$\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m, (m \in \mathbb{R})$$

A. $2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m \leq 3\sqrt{2} + 6$ B. $2\sqrt{6} + 3\sqrt[4]{6} \leq m \leq 3\sqrt{2} + 8$
C. $\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m \leq 3\sqrt{2} + 6$ D. $\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m \leq 3\sqrt{2} + 6$

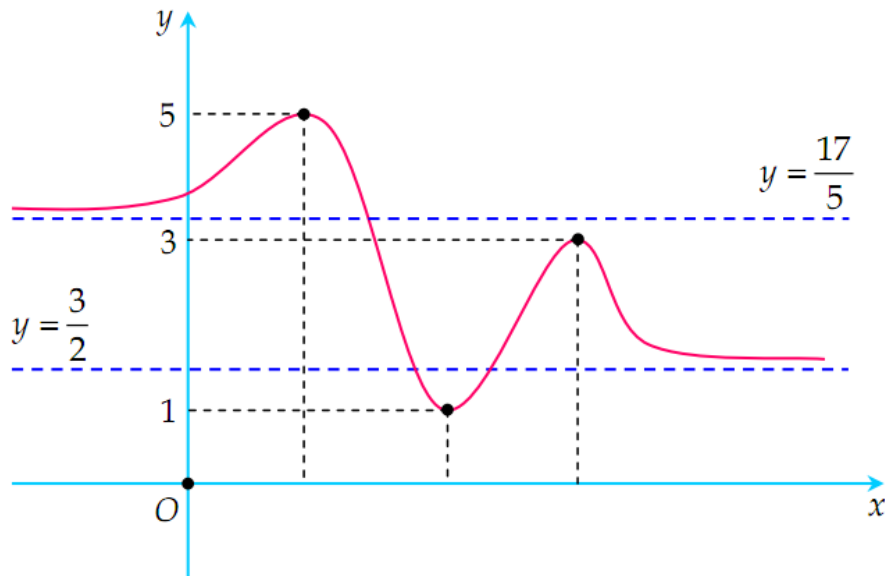
Câu 18. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d; a \neq 0$ là các số thực, có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ nghịch trên khoảng $(2; +\infty)$?

- A. 2012 B. 2013 C. 4028 D. 4026

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m để phương trình

$$e^{f^3(x) + 2f^2(x) - 7f(x) + 5} + \ln\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = m \text{ có nghiệm là}$$

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn C.

(1) $\Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 - 9x = f(x)$. Bảng biến thiên của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra pt có đúng 1 nghiệm khi $m < -27$ hoặc $m > 5$

Câu 2. Chọn B.

Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$. Phương trình thành: $2t = t^2 - 1 + m \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 1$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 1, t \geq 0; f'(t) = -2t + 2$

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	1	$\nearrow 2$	$\searrow -\infty$

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $m \leq 2$.

Câu 3. Chọn B

Đặt $t = f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. Ta có $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Xét $x > 0$ ta có bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow \sqrt{5}$	$\nearrow 1$	$\nearrow +\infty$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $m = t^2 + t - 5 \Leftrightarrow t^2 + t - 5 - m = 0$ (1).

Nếu phương trình (1) có nghiệm t_1, t_2 thì $t_1 + t_2 = -1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t \geq 1$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in (1; \sqrt{5})$. Đặt $g(t) = t^2 + t - 5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t) = m$ có

đúng 1 nghiệm $t \in (1; \sqrt{5})$. Ta có $g'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in (1; \sqrt{5})$.

Bảng biến thiên:

t	1	$\sqrt{5}$
$g'(t)$		+
$g(t)$	-3	$\sqrt{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra $-3 < m < \sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 4. Chọn C.

Bất phương trình $x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m(x^2 + x + 1) \geq -x - 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{-x-2}{x^2+x+1}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{-x-2}{x^2+x+1}$ với $1 \leq x \leq 2$. Có $f'(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2} > 0, \forall x \in [1;2]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq \max_{[1;2]} f(x) \Leftrightarrow m \geq -\frac{4}{7}$

Câu 5. Chọn B.

Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$. Điều kiện: $t \geq 1$.

Phương trình thành: $t^2 + t - 2m - 2 = 0$ (*). Khi $x \in [1; 3^{\sqrt{3}}] \Rightarrow t \in [1; 2]$

(*) $\Leftrightarrow f(t) = \frac{t^2+t-2}{2} = m$. Bảng biến thiên :

t	1	2
$f'(t)$		+
$f(t)$	0	2

Từ bảng biến thiên ta có : $0 \leq m \leq 2$

Câu 6. Chọn C

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$

Phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 1 = mx$ (*)

Vì $x = 0$ không là nghiệm nên (*) $\Leftrightarrow m = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x}$

Xét $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x}$. Ta có $f'(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2} > 0 \forall x \geq -\frac{1}{2}; x \neq 0$

Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm thì $m \geq \frac{9}{2}$.

Câu 7. Chọn D.

Điều kiện : $x \geq 1$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 3\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} + m = 2\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x+1)^2}} \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$$

$t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ với $x \geq 1$ ta có $0 \leq t < 1$. Thay vào phương trình ta được $m = 2t - 3t^2 = f(t)$

Ta có: $f'(t) = 2 - 6t$ ta có: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	0	$\frac{1}{3}$	-1

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm khi $0 \leq m < \frac{1}{3}$

Câu 8. Chọn D.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{(1+2x)(3-x)} \text{ khi } x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right] \Rightarrow t \in \left[0; \frac{7\sqrt{2}}{4}\right]$$

Thay vào bất phương trình ta được $f(t) = t^2 + t > m$

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{7\sqrt{2}}{4}$
$f'(t)$		$+$
$f(t)$	0	$\frac{49+14\sqrt{2}}{8}$

Từ bảng biến thiên ta có : $m < 0$

Câu 9. Chọn D.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \Leftrightarrow 2\sqrt{(1+x)(3-x)} = t^2 - 4$$

Với $x \in [-1; 3] \Rightarrow t \in [2; 2\sqrt{2}]$. Thay vào bất phương trình ta được: $m \leq -t^2 + 3t + 4$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 3t + 4$; $f'(t) = -2t + 3$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} < 2$

t	2	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		-
$f(t)$	6	$6\sqrt{2} - 4$

Từ bảng biến thiên ta có $m \leq 6\sqrt{2} - 4$ thỏa đề bài

Câu 10. Chọn D.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} > 0 \Rightarrow t^2 = (\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x})^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)}$$

$$\Rightarrow 9 \leq t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \leq 9 + (3+x) + (6-x) = 18$$

$$\Rightarrow \sqrt{18+3x-x^2} = \sqrt{(3+x)(6-x)} = \frac{1}{2}(t^2 - 9); t \in [3; 3\sqrt{2}]$$

Xét $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{9}{2}$; $f'(t) = 1 - t < 0; \forall t \in [3; 3\sqrt{2}] \Rightarrow \max_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t) = f(3) = 3$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow \max_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t) = 3 \leq m^2 - m + 1 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1 \text{ hoặc } m \geq 2$$

Câu 11. Chọn B

Đặt $t = 2^x > 0$ thì $m \cdot 4^x + (m-1) \cdot 2^{x+2} + m-1 > 0$, đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow m \cdot t^2 + 4(m-1)t + (m-1) > 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow m(t^2 + 4t + 1) > 4t + 1, \forall t > 0$$

$$\Leftrightarrow g(t) = \frac{4t+1}{t^2+4t+1} < m, \forall t > 0.$$

Ta có $g'(t) = \frac{-4t^2 - 2t}{(t^2 + 4t + 1)^2} < 0$ nên $g(t)$ nghịch biến trên $[0; +\infty)$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow \max_{t \geq 0} g(t) = g(0) = 1 \leq m$$

Câu 12. Chọn A.

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow 3mx < x^3 - \frac{1}{x^3} + 2, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow 3m < x^2 - \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x} = f(x), \forall x \geq 1.$$

Ta có $f'(x) = 2x + \frac{4}{x^5} - \frac{2}{x^2} \geq 2\sqrt{2x \left(\frac{4}{x^5}\right)} - \frac{2}{x^2} = \frac{4\sqrt{2}-2}{x^2} > 0$ suy ra $f(x)$ tăng.

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow f(x) > 3m, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \min_{x \geq 1} f(x) = f(1) = 2 > 3m \Leftrightarrow \frac{2}{3} > m$$

Câu 13. Chọn A.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\cos^2 x} + 3\left(\frac{1}{9}\right)^{\cos^2 x} \geq m. \text{ Đặt } t = \cos^2 x, 0 \leq t \leq 1$$

(1) trở thành $\left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{9}\right)^t \geq m$ (2). Đặt $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{9}\right)^t$.

Ta có (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \in [0;1] \Leftrightarrow m \leq \max_{t \in [0;1]} f(t) \Leftrightarrow m \leq 4$

Câu 14. Chọn C

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 4$. Xét $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2;4]$.

Có $f'(x) = \frac{3(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0, \forall x \in (-2;4)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[-2;4]$, bpt $\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \geq 1$.

So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là $S = [1;4] \Rightarrow a + b = 5$.

Câu 15. Chọn A.

Điều kiện: $1 \leq x \leq 3$; bpt $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{(3-x)^2 + 2} + \sqrt{3-x}$

Xét $f(t) = \sqrt{t^2 + 2} + \sqrt{t}$ với $t \geq 0$. Có $f'(t) = \frac{t}{2\sqrt{t^2 + 2}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$. (1) $\Leftrightarrow f(x-1) > f(3-x) \Leftrightarrow x-1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$

So với điều kiện, bpt có tập nghiệm là $S = (2;3]$.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ có nghiệm.

A. $m \leq \sqrt{2} - 1$.

B. $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \leq 1$.

Lời giải

ĐK: $x \in [-1;1]$.

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$. Với $x \in [-1;1]$, ta xác định ĐK của t như sau:

Xét hàm số $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ với $x \in [-1;1]$.

Ta có:

$t' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1-x^4}}$, cho $t' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ta có $t(-1) = \sqrt{2}, t(0) = 0, t(1) = \sqrt{2}$

Vậy với $x \in [-1;1]$ thì $t \in [0; \sqrt{2}]$

Từ $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{1-x^4} = 2 - t^2$.

Khi đó pt đã cho tương đương với: $m(t+2) = -t^2 + t + 2 \Leftrightarrow \frac{-t^2 + t + 2}{t+2}$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình $\frac{-t^2 + t + 2}{t+2} = m$ có nghiệm $t \in [0; \sqrt{2}]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{-t^2 + t + 2}{t + 2}$ với $t \in [0; \sqrt{2}]$.

Ta có: $f'(t) = \frac{-t^2 - 4t}{(t + 2)^2} < 0, \forall t \in [0; \sqrt{2}]$

Suy ra: $\max_{t \in [0; \sqrt{2}]} f(t) = f(0) = 1, \min_{t \in [0; \sqrt{2}]} f(t) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$.

Bây giờ yêu cầu bài toán xảy ra khi: $\min_{t \in [0; \sqrt{2}]} f(t) \leq m \leq \max_{t \in [0; \sqrt{2}]} f(t) \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$

Vậy với $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Câu 17. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt

$$\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m, (m \in \mathbb{R})$$

A. $2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m \leq 3\sqrt{2} + 6$

B. $2\sqrt{6} + 3\sqrt[4]{6} \leq m \leq 3\sqrt{2} + 8$

C. $\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m \leq 3\sqrt{2} + 6$

D. $\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m \leq 3\sqrt{2} + 6$

Lời giải

ĐK: $0 \leq x \leq 6$

Đặt vế trái của phương trình là $f(x), x \in [0; 6]$.

Ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right), x \in (0; 6)$$

Đặt:

$$u(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}} \right), v(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right), x \in (0; 6)$$

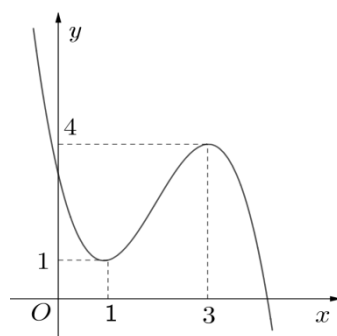
Ta thấy $u(2) = v(2) = 0, x \in (0; 6) \Rightarrow f'(2) = 0$. Hơn nữa $u(x), v(x)$ cùng dương trên khoảng $(0; 2)$ và cùng âm trên khoảng $(2; 6)$.

BBT

x	0	2	6		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6}$ $3\sqrt{2} + 6$ $\sqrt[4]{12} + 2\sqrt{3}$				

Vậy với $2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m \leq 3\sqrt{2} + 6$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Chọn A.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d; a \neq 0$ là các số thực, có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ nghịch trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 2012

B. 2013

C. 4028

D. 4026

Lời giải:

Chọn A

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 6x)f'(x^3 - 3x^2 + m)$.

Với mọi $x \in (2; +\infty)$ ta có $3x^2 - 6x > 0$ nên để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ nghịch biến trên

N.C.Đ

khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow f'(x^3 - 3x^2 + m) \leq 0, \forall x \in (2; +\infty)$.

Dựa vào đồ thị ta có hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$ nên

$$f'(x) \leq 0 \text{ với } x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty).$$

$$\text{Do đó: } f'(x^3 - 3x^2 + m) \leq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + m \leq 1, \forall x \in (2; +\infty) \\ x^3 - 3x^2 + m \geq 3, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -x^3 + 3x^2 + 1, \forall x \in (2; +\infty) \\ m \geq -x^3 + 3x^2 + 3, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

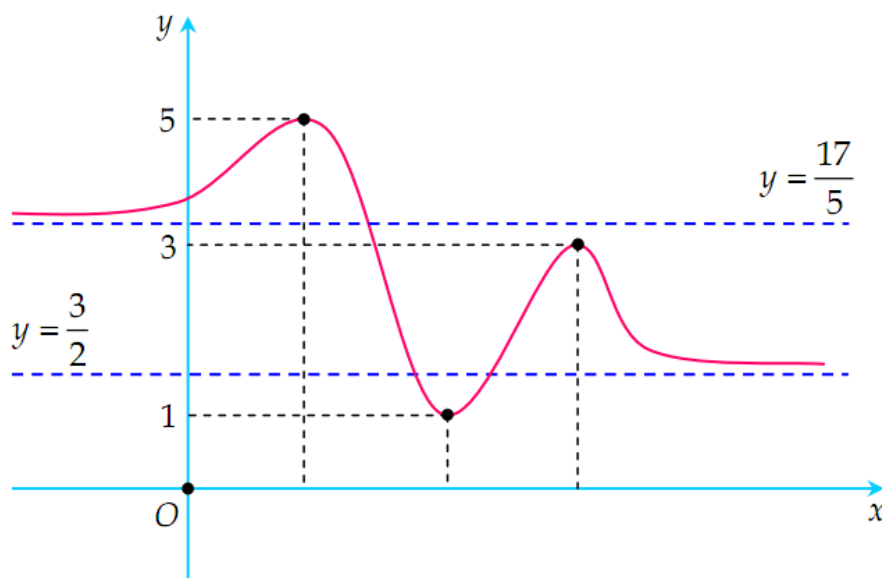
Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x^2 + 1) = -\infty$ nên trường hợp $m \leq -x^3 + 3x^2 + 1, \forall x \in (2; +\infty)$ không xảy ra.

Trường hợp: $m \geq -x^3 + 3x^2 + 3, \forall x \in (2; +\infty)$. Ta có hàm số $h(x) = -x^3 + 3x^2 + 3$ liên tục trên $[2; +\infty)$ và $h'(x) = -3x^2 + 6x < 0, \forall x \in (2; +\infty)$ nên $h(x)$ nghịch biến trên $[2; +\infty)$ suy ra $\max_{[2; +\infty)} h(x) = h(2)$. Do đó $m \geq -x^3 + 3x^2 + 3, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{[2; +\infty)} h(x) = h(2) \Leftrightarrow m \geq 7$.

Do m nguyên thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ nên $m \in \{7; 8; 9; \dots; 2018\}$.

Vậy có 2012 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m để phương trình

$$e^{f^3(x)+2f^2(x)-7f(x)+5} + \ln\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = m \text{ có nghiệm là}$$

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Chọn B

Lời giải
N.C.Đ

Quan sát đồ thị ta thấy $1 \leq f(x) \leq 5, \forall x \in \mathbb{R}$, đặt $t = f(x)$ giả thiết trở thành

$$e^{t^3+2t^2-7t+5} + \ln\left(t + \frac{1}{t}\right) = m.$$

Xét hàm: $g(t) = t^3 + 2t^2 - 7t + 5, t \in [1; 5]$

$$g'(t) = 3t^2 + 4t - 7 \geq 0 \forall t \geq 1 \Rightarrow g(1) \leq g(t) \leq g(5) \Leftrightarrow 1 \leq g(t) \leq 145.$$

$$\text{Mặt khác } h(t) = t + \frac{1}{t}, h'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \geq 0 \forall t \in [1; 5] \Rightarrow 2 \leq h(t) \leq \frac{26}{5}.$$

Do đó hàm $u(t) = e^{t^3+2t^2-7t+5} + \ln\left(t + \frac{1}{t}\right)$ đồng biến trên đoạn $[1; 5]$.

$$\text{Suy ra: Phương trình đã cho có nghiệm} \Leftrightarrow e + \ln 2 \leq m \leq e^{145} + \ln \frac{26}{5}.$$

Vậy giá trị nguyên nhỏ nhất của m là 4.



CHỦ ĐỀ: CỰC TRỊ

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 1

TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

- Câu 1.** Biết $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = 3$
- A. $y(3) = 2$. B. $y(3) = 11$.
C. $y(3) = 0$. D. $y(3) = -3$
- Câu 2.** Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?
- A. $M(0;-1)$. B. $Q(-1;10)$. C. $P(1;0)$. D. $N(1;-10)$.
- Câu 3.** Hàm số $f(x) = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + C_{2019}^2 x^2 + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019}$ có bao nhiêu điểm cực trị?
- A. 0. B. 2018. C. 1. D. 2019.
- Câu 4.** Cho hàm số $f(x) = 1 + C_{10}^1 x + C_{10}^2 x^2 + \dots + C_{10}^{10} x^{10}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng
- A. 10. B. 0. C. 9. D. 1.
- Câu 5.** Giá trị cực đại của hàm số $y = x + \sin 2x$ trên $(0; \pi)$ là:
- A. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 6.** Gọi A , B , C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng
- A. $\sqrt{2} + 1$. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2} - 1$. D. 1.
- Câu 7.** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC . Tính diện tích ΔABC .
- A. $S = 2$. B. $S = 1$. C. $S = \frac{1}{2}$. D. $S = 4$.
- Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là -2 ; -1 ; 0 và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?
- A. 6. B. 4. C. 5. D. 3.
- Câu 9.** Cho hàm số $f(x) = x^2(x-1)e^{3x}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.
- Câu 10.** Số điểm cực trị của hàm số $y = \left| \sin x - \frac{x}{4} \right|$, $x \in (-\pi; \pi)$ là
- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.



Câu 11. Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(-2x^2 + 4x)$ là.

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 5.

Câu 13. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn (C). Bán kính của (C) gần đúng với giá trị nào dưới đây?

- A. 12,4. B. 6,4. C. 4,4. D. 27.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3-x)(x^2-1) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y = f'(x) - x^2 - 1$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a > 0, c > 2018$ và $a + b + c < 2018$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$ là

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 16. Hàm số $f(x) = \left| \frac{x}{x^2+1} - m \right|$ (với m là tham số thực) có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-1)(x-4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	-1	3	2	

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

- A. 7. B. 5. C. 6. D. 8.



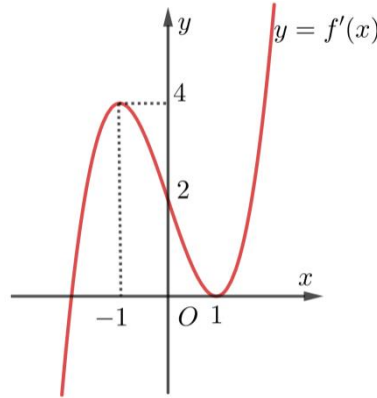
Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$	-2	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

- A. $x = -1$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = -3$.

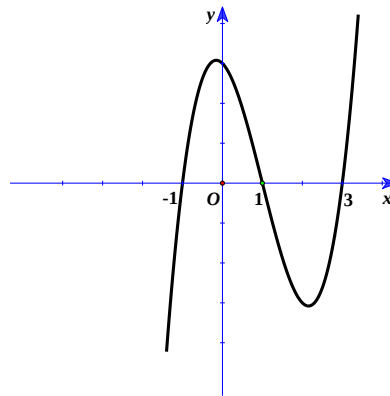
Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là

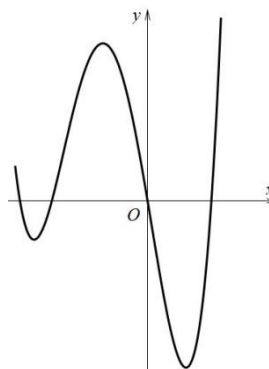
- A. 3. B. 4. **C. 1.** D. 2.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $f(\sqrt{x^2 + 2x + 2019})$ là



- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:

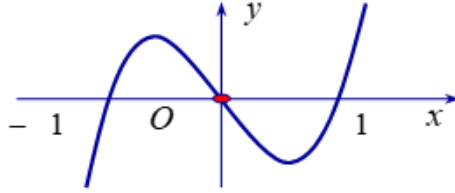




Tìm số điểm cực đại của hàm số $y = \left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)} - 2019^{f(x)}$

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

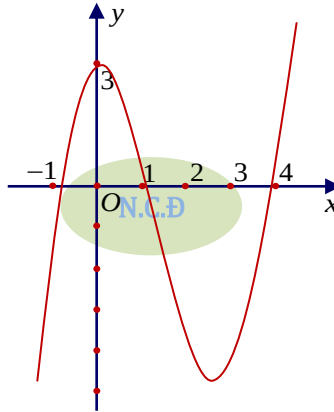
Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x \in \mathbb{R}$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ Có đồ thị (như hình vẽ)



Số điểm cực trị của hàm số $y = f[f'(x)]$ là

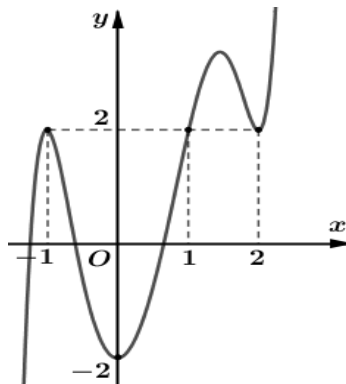
- A. 7. B. 11. C. 9. D. 8.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$?



- A. 2. B. 8. C. 10. D. 6.

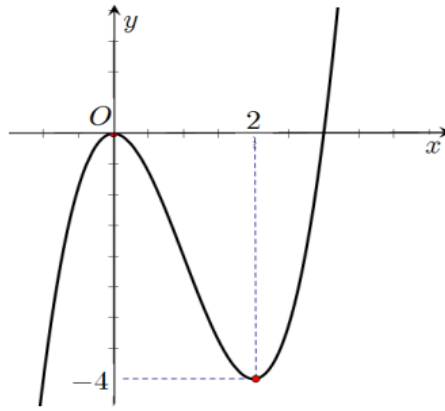
Câu 26. Cho hàm số $y = f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = \pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

- A. $x = 1$. B. $x = 0$. C. $x = 2$. D. $x = -1$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = |2f(x) + 5| + 3$ là



A. 2.

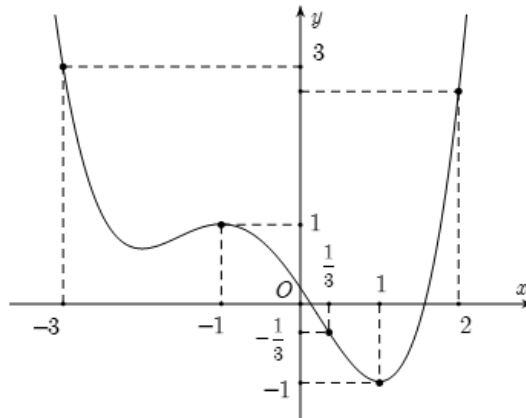
B. 3.

C. 5.

D. 7.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$$g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3 \text{ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng } (0; 2\pi)?$$



A. 9.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = x^2(x-1)^3(x^2 - 2mx + m + 6)$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Vậy $m \in [-2; 3] \cup \{7\}$, mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 7\}$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2(f(x))^3 + 4(f(x))^2 + 1$ là

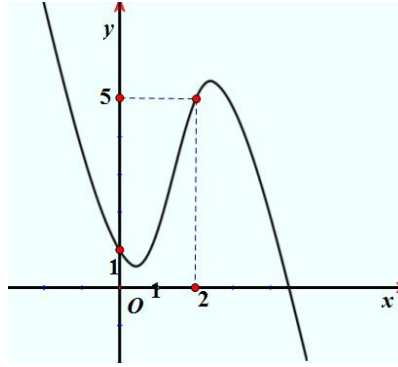
A. 4.

B. 9.

C. 5.

D. 3

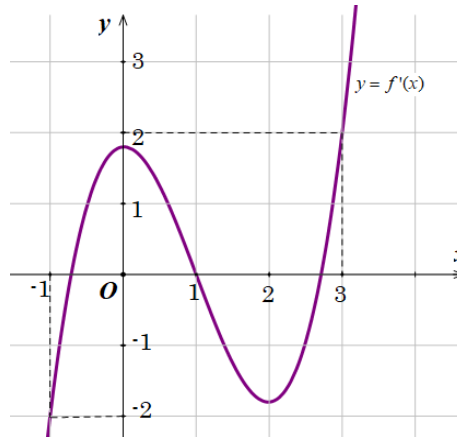
Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- B. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- C. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ không có cực trị.
- D. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ không có cực trị tại $x = 0$.

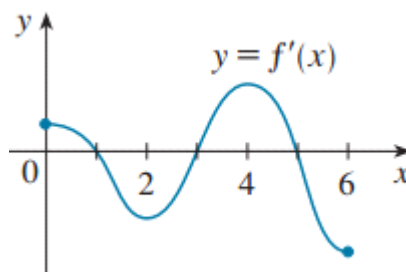
Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

- A. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.
- B. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
- C. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.
- D. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2 + 2019$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $[0; 6]$.



A. 7.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	-1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	1	0	3	$-\infty$

Xét hàm số $y = g(x) = f(|x - 4|) + 2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng

A. 5.

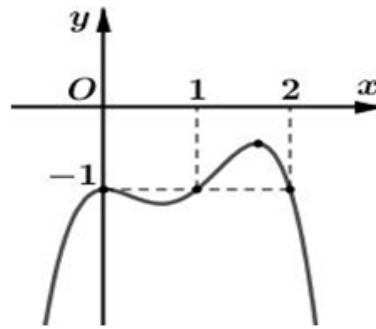
B. 1.

C. 9.

D. 2.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Hàm số $g(x) = f(x) + x$ đạt cực tiểu tại điểm.

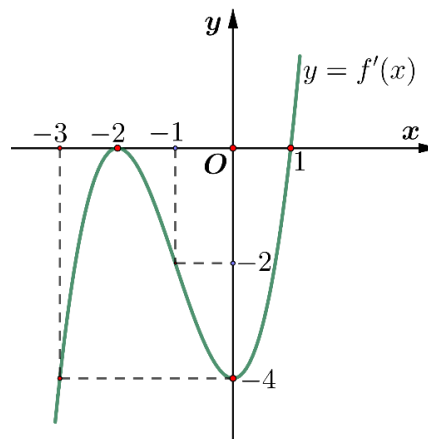


A. $x = 1$.

B. $x = 2$.

C. không có điểm cực tiểu. D. $x = 0$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x)$ là

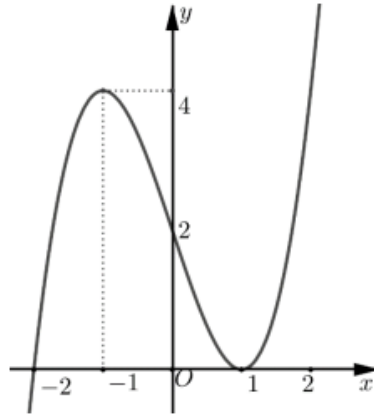
A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

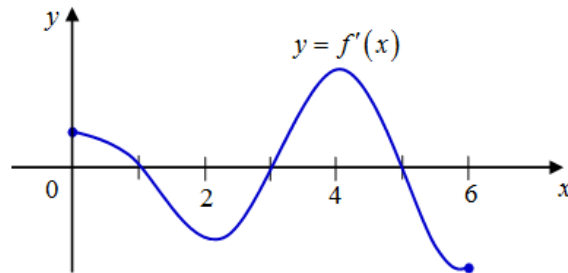
Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ là

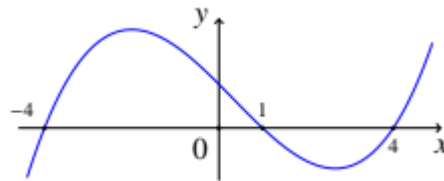
- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị?



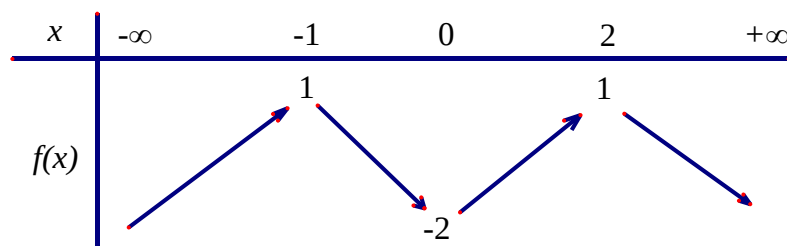
- A. 7. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(2x - x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



- A. 5. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(-x + 3)$ đạt cực đại tại

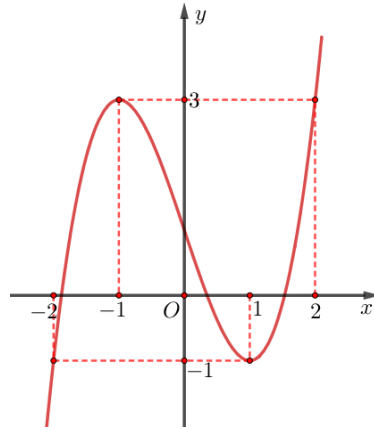


- A. $x = -1$ B. $x = 2$ C. $x = 0$ D. $x = 3$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$



có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



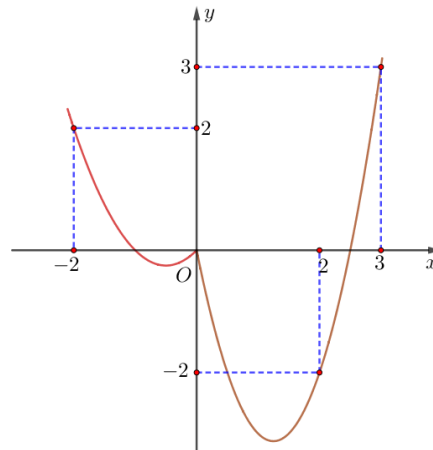
A. 6.

B. 8.

C. 7.

D. 9.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $y = \left| f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0) \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$?



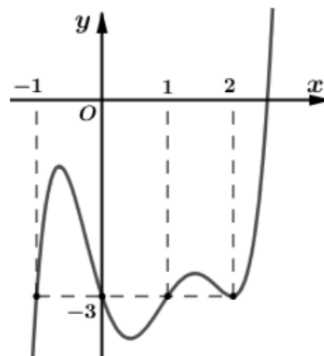
A. 6.

B. 8.

C. 3.

D. 5.

Câu 43. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

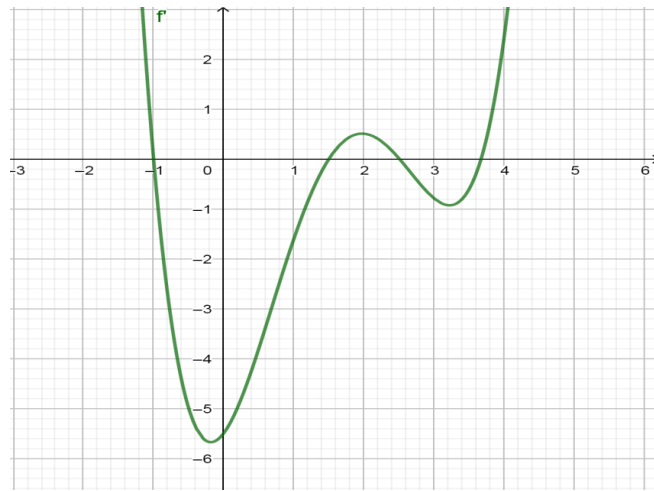
Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'	-	0	+	0	-	0	+		
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2f^3(x) + 4f^2(x) + 1$ là

- A. 4. B. 9. C. 5. D. 3.

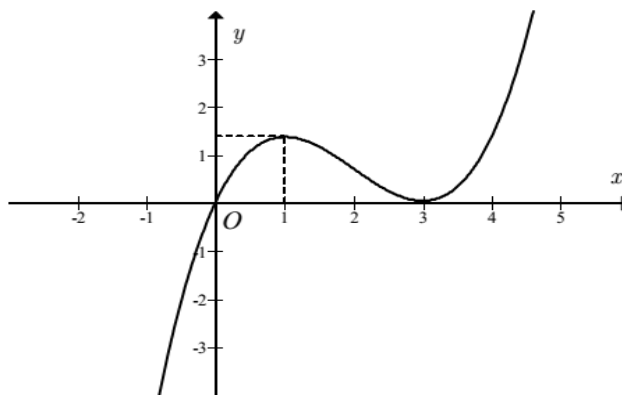
Câu 45. Cho hàm số đa thức $f(x) = mx^5 + nx^4 + px^3 + qx^2 + hx + r$, ($m, n, p, q, h, r \in \mathbb{R}$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ (như hình vẽ bên dưới) cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là $-1; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{11}{3}$.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) - (m + n + p + q + h + r)|$ là

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới

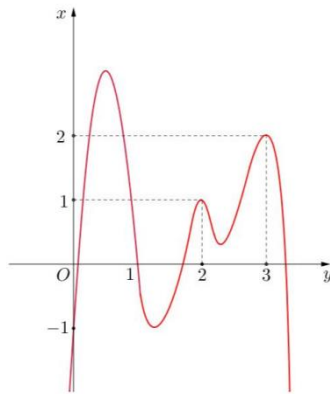


Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-100; 100]$ để hàm số $h(x) = |f^2(x+2) + 4f(x+2) + 3m|$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

- A. 5047. B. 5049. C. 5050. D. 5043.

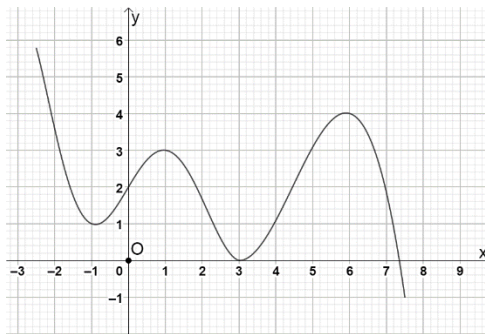


Câu 47. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = |2f(x) - (x-1)^2|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?



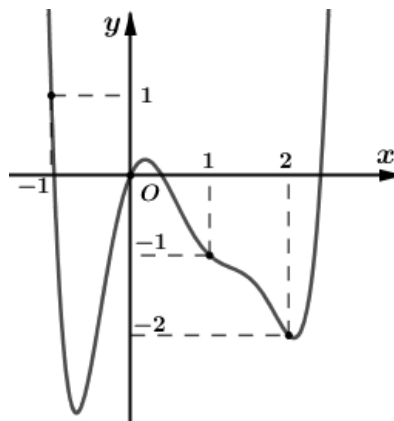
- A. 9. B. 3. C. 7. D. 5.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 2019^{f(f(x)-1)}$.



- A. 13. B. 11. C. 10. D. 12.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$ là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Biết $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = 3$

A. $y(3) = 2$.

B. $y(3) = 11$.

C. $y(3) = 0$.

D. $y(3) = -3$

Lời giải

Chọn A

Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\begin{aligned} \text{Từ giả thiết ta có } \begin{cases} y(0) = 2 \\ y(2) = -2 \\ y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \\ &\Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y(3) = 2 \end{aligned}$$

Câu 2. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

A. $M(0;-1)$.

B. $Q(-1;10)$.

C. $P(1;0)$.

D. $N(1;-10)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

Ta có $f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) \cdot f'(x) - 8x - 2$.

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị A và B nên $f'(x_A) = f'(x_B) = 0$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} y_A = f(x_A) = -8x_A - 2 \\ y_B = f(x_B) = -8x_B - 2 \end{cases}$$

Do đó phương trình đường thẳng AB là $y = -8x - 2$.

Khi đó ta có $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB . **Chọn D**

Cách 2: Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Suy ra tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(3;-26)$ và $B(-1;6)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-4;32)$ cùng phương với $\vec{u}(-1;8)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua $B(-1;6)$ và nhận $\vec{u}(-1;8)$ làm vectơ chỉ phương

$$\text{là } \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 6 + 8t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Khi đó ta có $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB . **Chọn D**

Câu 3. Hàm số $f(x) = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + C_{2019}^2 x^2 + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0.

B. 2018.

C. 1.

D. 2019.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + C_{2019}^2 x^2 + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019} = (1+x)^{2019}$

$$\Rightarrow f'(x) = 2019 \cdot (1+x)^{2018}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Vì $x = -1$ là nghiệm bội chẵn nên $x = -1$ không phải là điểm cực trị của hàm số.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = 1 + C_{10}^1 x + C_{10}^2 x^2 + \dots + C_{10}^{10} x^{10}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

A. 10.

B. 0.

C. 9.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng khai triển nhị thức Niu ton, ta có:

$$f(x) = 1 + C_{10}^1 x + C_{10}^2 x^2 + \dots + C_{10}^{10} x^{10} = (1+x)^{10}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 10(1+x)^9$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có duy nhất một điểm cực trị $x = -1$.

Câu 5. Giá trị cực đại của hàm số $y = x + \sin 2x$ trên $(0; \pi)$ là:

A. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 1 + 2\cos 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Xét trên $(0; \pi)$ ta có $x = \frac{\pi}{3}$ và $x = \frac{2\pi}{3}$.

Ta có $y'' = -4\sin 2x$.

$y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0$ nên $x = \frac{\pi}{3}$ là điểm cực đại.

$y''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0$ nên $x = \frac{2\pi}{3}$ là điểm cực tiểu.

Vậy giá trị cực đại là $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6. Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. $\sqrt{2}+1$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2}-1$.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$ có ba điểm cực trị là $A(0;4)$, $B(1;3)$ và $C(-1;3)$.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , ta có $BC \cdot \overrightarrow{IA} + AC \cdot \overrightarrow{IB} + AB \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Mà $AB = AC = \sqrt{2}$ và $BC = 2$ nên suy ra $I\left(0; \frac{4+3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)$.

Phương trình đường thẳng BC là $y = 3$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = d(I, BC) = \sqrt{2} - 1$.

Cách 2:

Áp dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có:

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \sqrt{2} - 1$$

trong đó $a = BC = 2$; $b = c = AB = AC = \sqrt{2}$; $p = \frac{a+b+c}{2}$
N.C.Đ

Cách 3:

Áp dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có:

$$r = (p-a) \tan \frac{A}{2} = \sqrt{2} - 1 \text{ với } \cos A = \frac{(-2)^3 + 8.1}{(-2)^3 - 8 - 1} = 0 \Rightarrow A = 90^\circ.$$

Câu 7. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC . Tính diện tích ΔABC .

A. $S = 2$.

B. $S = 1$.

C. $S = \frac{1}{2}$.

D. $S = 4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;1)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$

$$\overrightarrow{AB} = (-1; -1); \overrightarrow{AC} = (1; -1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC = \sqrt{2} \end{cases}$$

Suy ra ΔABC vuông cân tại A do đó $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 1$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là -2 ; -1 ; 0 và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Do hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x) = 0$ có ba nghiệm (đơn hoặc bội lẻ) là $x = -2; x = -1; x = 0$.

Đặt $g(x) = f(x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x)$. Vì $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó những điểm $g'(x)$ có thể đổi dấu thuộc tập các điểm thỏa mãn

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Ba nghiệm trên đều là nghiệm đơn hoặc bội lẻ nên hàm số } g(x) \text{ có ba điểm cực trị.}$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = x^2(x-1)e^{3x}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x)$ có TXĐ là $\mathbb{R}$, có một nguyên hàm là hàm số $F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ nên } F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)e^{3x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu $F'(x)$ như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$F'(x)$	-	0	-	0	+

Dựa vào bảng trên, ta thấy hàm số $F(x)$ có một điểm cực trị.

Câu 10. Số điểm cực trị của hàm số $y = \left| \sin x - \frac{x}{4} \right|$, $x \in (-\pi; \pi)$ là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = f(x) = \sin x - \frac{x}{4}$ với $x \in (-\pi; \pi)$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \cos x - \frac{1}{4}. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \\ x = x_2 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

$$f(x_1) = \sin x_1 - \frac{x_1}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{x_1}{4} < -\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\pi}{8} < 0.$$

$$f(x_2) = \sin x_2 - \frac{x_2}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{x_2}{4} > \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\pi}{8} > 0.$$

BBT

x	$-\pi$	x_1	x_2	π		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\frac{\pi}{4}$					

$f(x_1)$ $\nearrow$ $f(x_2)$ $\searrow$ $-\frac{\pi}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại

ba điểm phân biệt khác x_1, x_2 . Suy ra hàm số $y = \left| \sin x - \frac{x}{4} \right|$, với $x \in (-\pi; \pi)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 11. Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

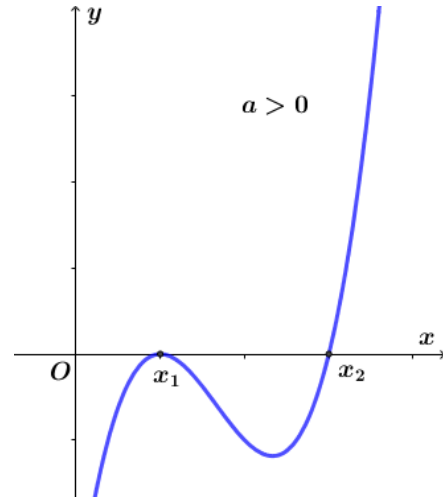
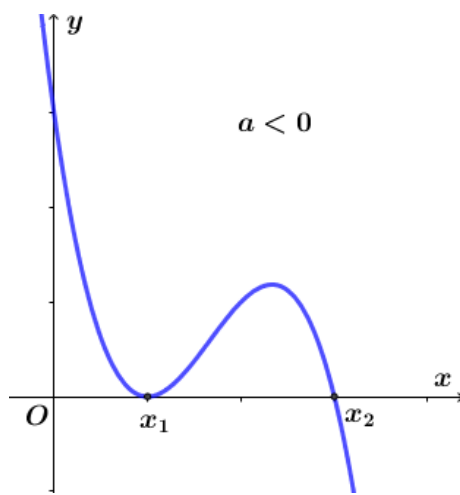
Lời giải

Chọn D

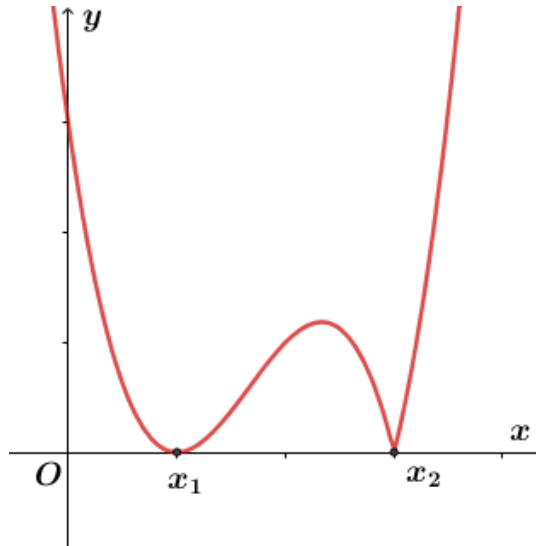
Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ là sự tương giao của đồ thị hàm số $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ và trục hoành.

Do phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ có đúng hai nghiệm thực nên phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có thể viết dưới dạng $a(x - x_1)^2(x - x_2) = 0$ với x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình (giả sử $x_1 < x_2$). Khi đó đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ x_1 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_2 .

Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) ứng với từng trường hợp $a > 0$ và $a < 0$:



Đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ ($a \neq 0$) tương ứng là



Vậy đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ ($a \neq 0$) có tất cả 3 điểm cực trị.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(-2x^2 + 4x)$ là.

- A. 3. B. 4. C. 2. **D. 5.**

Lời giải

Chọn D

Quan sát đồ thị $f(x)$, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị $x = -2; x = 0$ vì vậy

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ có hai nghiệm } x = -2; x = 0 \text{ nên } f'(x) = 3a(x+2)x.$$

Ta có :

$$y' = [f(-2x^2 + 4x)]' = (-4x + 4)f'(-2x^2 + 2x) = (-4x + 4)(-2x^2 + 4x)$$

$$= 3a(-4x + 4)(-2x^2 + 4x)(-2x^2 + 4x + 2)$$

$$\Leftrightarrow y' = -48ax(x-2)(x-1)(x^2 - 2x - 1).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{và dấu của } y' \text{ đổi khi } x \text{ qua mỗi nghiệm trên. Vậy hàm số đã cho có}$$

5 điểm cực trị.

Câu 13. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn (C).

Bán kính của (C) gần đúng với giá trị nào dưới đây?

A. 12,4.

B. 6,4.

C. 4,4.

D. 27.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$$y' = x - 3 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \approx 2,8794 \\ x_2 \approx 0,6527 \\ x_3 \approx -0,5321 \end{cases}.$$

N.C.Đ

$\Rightarrow$ Tọa độ các điểm cực trị: $A \approx (2,879; -4,84), B \approx (0,653; -3,277), C \approx (-0,532; 3,617)$.

Gọi (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (1) là đường tròn đi qua ba điểm cực trị.

Thay tọa độ ba điểm A, B, C vào (1) ta được hệ phương trình 3 ẩn sau:

$$\begin{cases} 5,758a - 9,68b - c \approx 31,71 \\ 1,306a - 6,554b - c \approx 11,17 \\ -1,064a + 7,234b - c \approx 13,37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \approx 5,374 \\ b \approx 1,0833 \\ c \approx -11,25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R \approx \sqrt{a^2 + b^2 - c} \approx \sqrt{41,3} \approx 6,4 \Rightarrow \text{Chọn B}$$

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3-x)(x^2-1) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số

$y = f'(x) - x^2 - 1$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

A.

2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = -x^3 + 3x^2 + 3x - 3 \Rightarrow y' = f''(x) - 2x = -3x^2 + 4x + 3$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3};$$

$$y'' = -6x + 4; y''\left(\frac{2 + \sqrt{13}}{3}\right) = -2\sqrt{13} < 0; y''\left(\frac{2 - \sqrt{13}}{3}\right) = 2\sqrt{13} > 0$$

Suy ra hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a > 0$, $c > 2018$ và $a + b + c < 2018$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$ là

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

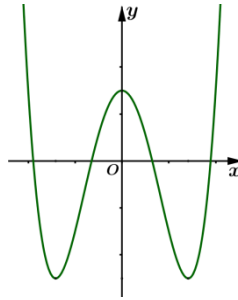
Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2018 = ax^4 + bx^2 + c - 2018$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a > 0 \\ c > 2018 \\ a + b + c < 2018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 2018 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b < 0 \Rightarrow \text{hàm số } y = g(x) \text{ là hàm trùng phương}$$

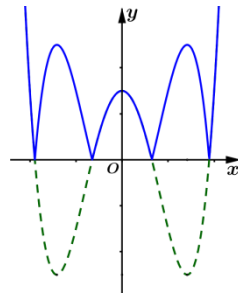
có 3 điểm cực trị.

Mà $g(0) = c - 2018 \Rightarrow g(0) > 0$, $g(1) = a + b + c - 2018 < 0 \Rightarrow g(x_{CT}) \leq g(1) < 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có dáng điệu như sau



Từ đồ thị $y = g(x)$, ta giữ nguyên phần phía trên trục Ox , phần dưới trục Ox ta lấy đối xứng qua trục Ox , ta được đồ thị hàm số $y = |g(x)|$.



Từ đó ta nhận thấy đồ thị $y = |g(x)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 16. Hàm số $f(x) = \left| \frac{x}{x^2 + 1} - m \right|$ (với m là tham số thực) có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1} - m$, TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$							

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = g(x)$ luôn có hai điểm cực trị.

Xét phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} - m = 0 \Leftrightarrow mx^2 - x + m = 0$, phương trình này có nhiều nhất hai nghiệm.

Vậy hàm số $f(x)$ có nhiều nhất bốn điểm cực trị.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

N.C.Đ

Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$									

Ta có $g(x) = f(3 - x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3 - x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3 - x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \leq -1 \\ 1 \leq 3 - x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$									

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Có } y' &= -(12x^3 - 24x) \cdot f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + 12x^5 - 12x^3 - 24x \\ &= -12x(x^2 - 2) \cdot f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + 12x(x^4 - x^2 - 2) \\ &= -12x(x^2 - 2) \cdot (f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1)). \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1) = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ f'(-x^4 + 4x^2 - 6) = x^2 + 1 \end{cases}.$$

Ta có $-x^4 + 4x^2 - 6 = -(x^2 - 2)^2 - 2 \leq -2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $f'(-x^4 + 4x^2 - 6) \leq f'(-2) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mà $x^2 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f'(-x^4 + 4x^2 - 6) = x^2 + 1$ vô nghiệm.

Hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
y			2		3		
	$-\infty$		-1	-1		2	

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Gọi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là (C) .

Đặt $g(x) = |f(x)|$ và gọi (C') là đồ thị của hàm số $y = g(x)$. Đồ thị (C') được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

+) Giữ nguyên phần đồ thị của (C) phía trên Ox ta được phần I.



+) Với phần đồ thị của (C) phía dưới Ox ta lấy đối xứng qua Ox , ta được phần II.
Hợp của phần I và phần II ta được (C').

Từ cách suy ra đồ thị của (C') từ (C), kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = |f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	a	-1	b	0	c	1	$+\infty$
$y = f(x) $	$+\infty$		2		1	1	3	$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		0		0		0		2

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$	-2	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

A. $x = -1$.

B. $x = 3$.

C. $x = 2$.

D. $x = -3$.

Lời giải

Chọn B

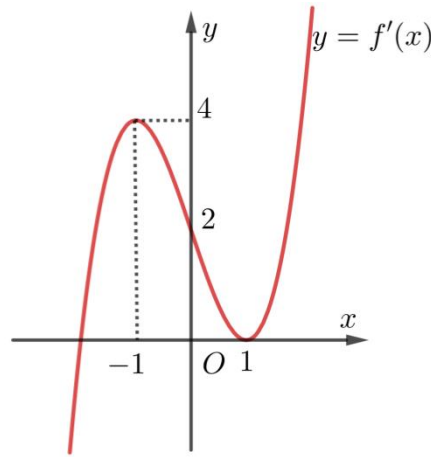
Ta có: $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2, x = 5$ và đạt cực đại tại $x = 2$, nên: $\begin{cases} f''(-2) > 0 \\ f''(2) < 0 \\ f''(5) > 0 \end{cases}$.

$$+ g'(x) = -f'(1-x) + x^2 - 2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} g'(-1) = -f'(2) + 0 = 0 \\ g'(3) = 0 \\ g'(2) = -f'(-1) - 3 < 0 \\ g'(-3) = -f'(4) + 12 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác: } g''(x) = f''(1-x) + 2x - 2 \Rightarrow \begin{cases} g''(-1) = f''(2) - 4 < 0 \\ g''(3) = f''(-2) + 4 > 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

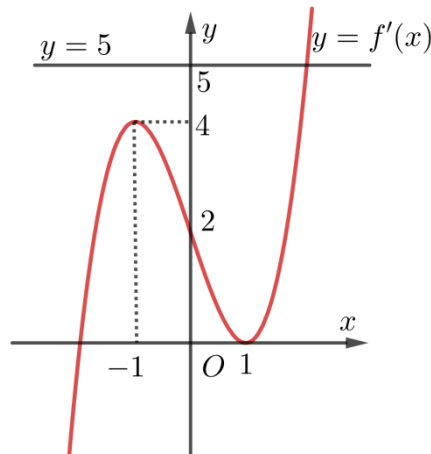
Lời giải

Chọn C

Ta có $y = f(x) - 5x$. Suy ra $y' = f'(x) - 5$.

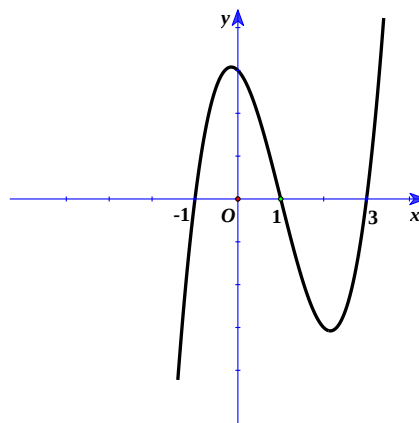
Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình $y' = 0$.

Ta có $y' = f'(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 5$.



Dựa vào đồ thị ta có $y = f'(x)$ cắt đường thẳng $y = 5$ tại duy nhất một điểm. Suy ra số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là 1.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $f(\sqrt{x^2 + 2x + 2019})$ là



A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$f(-1)$	$f(1)$	$f(3)$		$+\infty$	

Xét hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2019})$.

$$g'(x) = f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2019}) \cdot \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2019}} = f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2019}) \cdot \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2019}}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2019}) \cdot \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2019}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2019}) = 0 \\ \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2019}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 2019} = -1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2019} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2019} = 3 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 2019} = -1(vn) \\ x^2 + 2x + 2018 = 0(vn) \\ x^2 + 2x + 2010 = 0(vn) \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có: $x > 3$ thì $f'(x) > 0$.

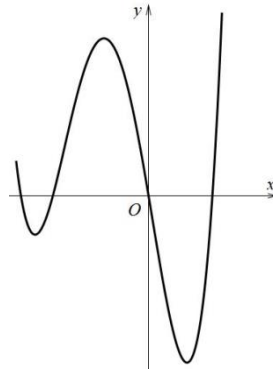
Mà $\sqrt{x^2 + 2x + 2019} \geq \sqrt{2019} > 3$ nên $f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2019}) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$				

Vậy $g'(x)$ chỉ đổi dấu qua nghiệm $x = -1$. Số điểm cực trị của hàm số là 1.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tìm số điểm cực đại của hàm số $y = \left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)} - 2019^{f(x)}$

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = g(x) = \left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)} - 2019^{f(x)}$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) \left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)} \ln\left(\frac{1}{2018}\right) - f'(x) 2019^{f(x)} \ln 2019$

$= f'(x) \left[\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)} \ln\left(\frac{1}{2018}\right) - 2019^{f(x)} \ln 2019 \right] \quad (1)$

Ta có: $\left[\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)} \ln\left(\frac{1}{2018}\right) - 2019^{f(x)} \ln 2019 \right] < 0; \forall x \quad (2)$.

Xét phương trình:

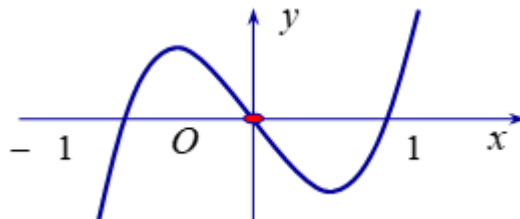
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \left[\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)} \ln\left(\frac{1}{2018}\right) - 2019^{f(x)} \ln 2019 \right] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

Mà từ (1) và (2) ta thấy $g'(x)$ trái dấu với $f'(x)$.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x \in \mathbb{R}$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
Có đồ thị (như hình vẽ)



Số điểm cực trị của hàm số $y = f[f'(x)]$ là

A. 7.

B. 11.

C. 9.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Quan sát đồ thị, nhận thấy đồ thị hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $O(0;0); A(-1;0); B(1;0)$. Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b = -1 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^3 - x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 1.$$

Đặt: $g(x) = f(f'(x))$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } g'(x) &= (f[f'(x)])' = f'[f'(x)] \cdot f''(x) = [(x^3 - x)^3 - (x^3 - x)](3x^2 - 1) \\ &= x(x-1)(x+1)(x^3 - x - 1)(x^3 - x + 1)(3x^2 - 1) \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x^3 - x - 1 = 0 \\ x^3 - x + 1 = 0 \\ 3x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = a (\approx 0,76) \\ x = b (b \approx -1,32) \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

N.C.Đ

Ta có bảng biến thiên:

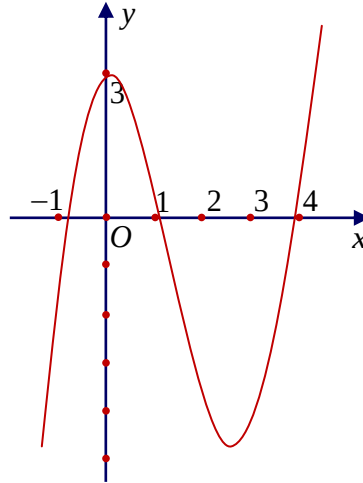
x	$-\infty$	b	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	a	1	$+\infty$			
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g												

* **Cách xét dấu $g'(x)$** : chọn $x = 2 \in (1; +\infty)$ ta có: $g'(2) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \forall x \in (1; +\infty)$, từ đó suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại.

Dựa vào BBT suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

* **Trắc nghiệm**: Số điểm cực trị bằng số nghiệm đơn (nghiệm bội lẻ) của phương trình đa thức $g'(x) = 0$. PT $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số đã cho có 7 điểm cực trị.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$?



A. 2.

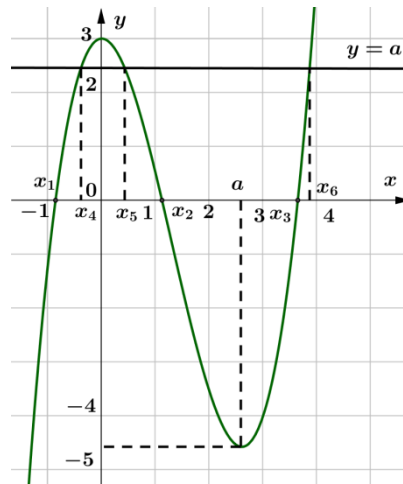
B. 8.

C. 10.

D. 6.

Lời giải

Chọn B



$$g'(x) = 3f'(f(x)) \cdot f'(x).$$

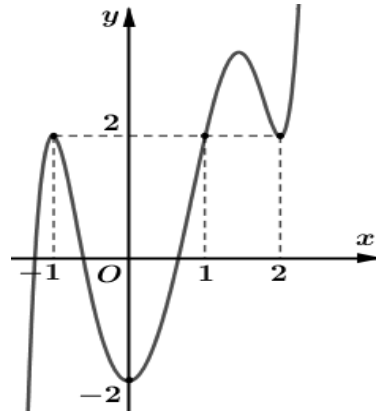
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = a \\ x = 0 \\ x = a \end{cases}, (2 < a < 3).$$

$f(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a .

Vì $2 < a < 3$ nên $f(x) = a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác $x_1, x_2, x_3, 0, a$.

Suy ra $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt. Do đó hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ có 8 điểm cực trị.

Câu 26. Cho hàm số $y = f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = \pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

A. $x = 1$.

B. $x = 0$.

C. $x = 2$.

D. $x = -1$.

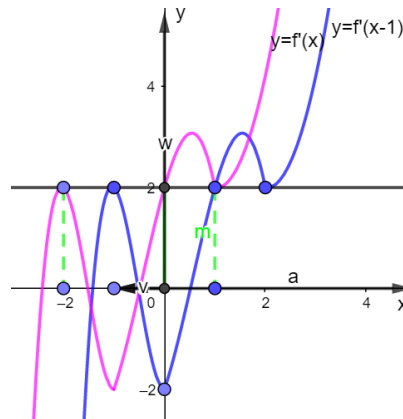
Lời giải:

Chọn B

Ta có: $y' = [2f'(x) - 4] \pi^{2f(x)-4x} \ln \pi$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2.$$

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận được từ việc tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x-1)$ sang trái 1 đơn vị



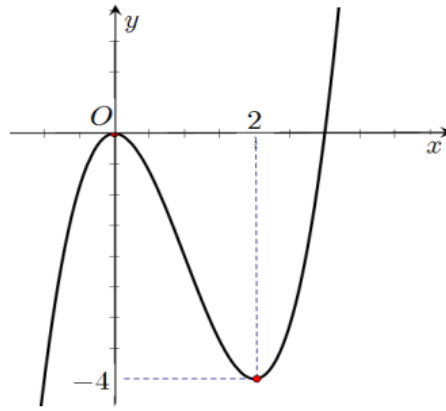
$$\text{nên } f'(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Do $x = -2$ và $x = 1$ là nghiệm bội chẵn nên ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$				$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = |2f(x) + 5| + 3$ là



A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = |2f(x) + 5| + 3 = \sqrt{(2f(x) + 5)^2} + 3$. Khi đó $y' = \frac{2(2f(x) + 5)f'(x)}{\sqrt{(2f(x) + 5)^2}}$.

Xét $f'(x) = 0$ dựa vào đồ thị có hai nghiệm $x = 0$; $x = 2$.

Xét $2f(x) + 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{5}{2}$ dựa vào đồ thị có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn

$x_1 < 0 < x_2 < 2 < x_3$.

N.C.Đ

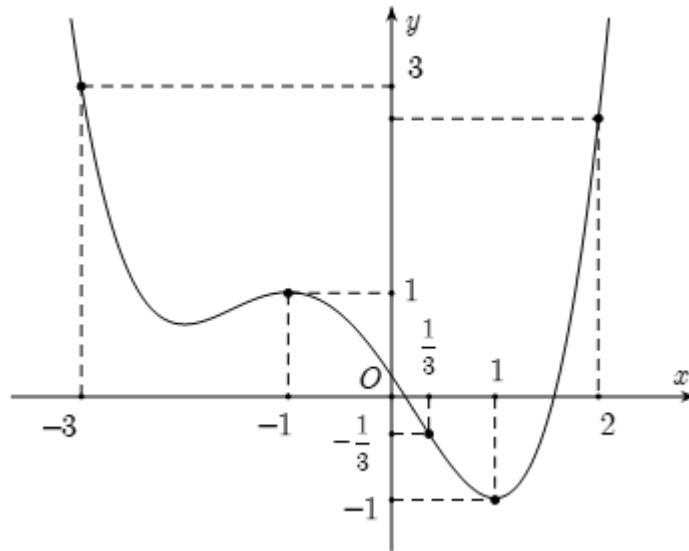
Khi đó hàm số $y = |2f(x) + 5| + 3$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	2	x_3	$+\infty$
y'	-		+	0	-		+
y							

Do đó hàm số $y = |2f(x) + 5| + 3$ có 5 điểm cực trị.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$?



A. 9.

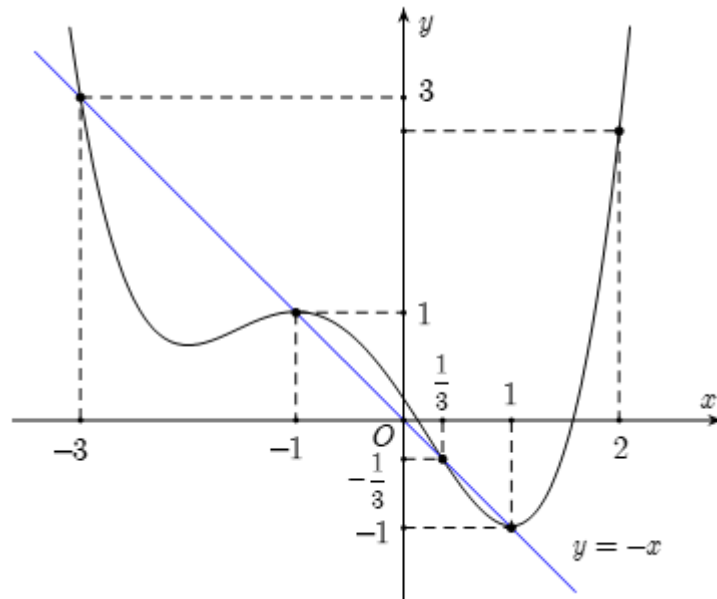
B. 7.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn B



Ta có $g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right)^2 + 3$

$$g'(x) = \frac{5\cos x}{2} \left[2f'\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \cos x = 0 \\ 2f'\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) = 0 \end{matrix}$$

Đặt $t = \frac{5\sin x - 1}{2}$ vì $x \in (0; 2\pi) \Rightarrow t \in [-3; 2]$

Khi đó : $2f'\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) = 0$ thành $f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \\ t = -1 \\ t = -3 \end{cases}$

$$\square \quad \text{Với} \quad t=1 \Rightarrow \frac{5\sin x - 1}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 \in (0; 2\pi) \\ x = \alpha_2 \in (0; 2\pi) \end{cases}.$$

$$\square \quad \text{Với} \quad t = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{5\sin x - 1}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_3 \in (0; 2\pi) \\ x = \alpha_4 \in (0; 2\pi) \end{cases}.$$

$$\square \quad \text{Với} \quad t = -1 \Rightarrow \frac{5\sin x - 1}{2} = -1 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_5 \in (0; 2\pi) \\ x = \alpha_6 \in (0; 2\pi) \end{cases}.$$

$$\square \quad \text{Với} \quad t = -3 \Rightarrow \frac{5\sin x - 1}{2} = -3 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} \in (0; 2\pi).$$

$$\square \quad \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \in (0; 2\pi) \\ x = \frac{3\pi}{2} \in (0; 2\pi) \end{cases}.$$

Vì $x = \frac{3\pi}{2}$ là nghiệm kép nên không là điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 7 điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = x^2(x-1)^3(x^2 - 2mx + m + 6)$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ g(x) = x^2 - 2mx + m + 6 = 0 \end{cases}.$$

Trong đó $x = 0$ là nghiệm bội chẵn và $x = 1$ là nghiệm bội lẻ.

Hàm số đã có một cực trị khi và chỉ khi $f'(x)$ đổi dấu một lần khi và chỉ khi $f'(x) = 0$ có một nghiệm bội lẻ.

+ Trường hợp 1: Phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép:

$$\text{Khi đó: } \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 3.$$

+ Trường hợp 2: $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm $x_1 = 1$

$$\text{Với } x_1 = 1, \text{ ta có: } g(1) = 1 - 2m + m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 7.$$

$$\text{Với } m = 7 \Rightarrow g(x) = x^2 - 14x + 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 13 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } m \in [-2; 3] \cup \{7\}, \text{ mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 7\}.$$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$								$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -2 -1 -2

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2(f(x))^3 + 4(f(x))^2 + 1$ là

A. 4.

B. 9.

C. 5.

D. 3

Lời giải

Chọn C

Đạo hàm: $g'(x) = 6f'(x)(f(x))^2 + 8f'(x)f(x)$.

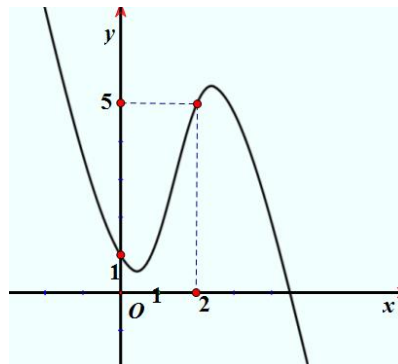
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = x_1 < -1 \\ x = x_2 > 1 \\ x = x_3 (-1 > x_3 > x_1) \\ x = x_4 (-1 < x_4 < 0) \\ x = x_5 (0 < x_5 < 1) \\ x = x_6 (1 < x_6 < x_2) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_3	-1	x_4	0	x_5	1	x_6	x_2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực tiểu.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực đại tại $x = 0$.

B. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ không có cực trị.

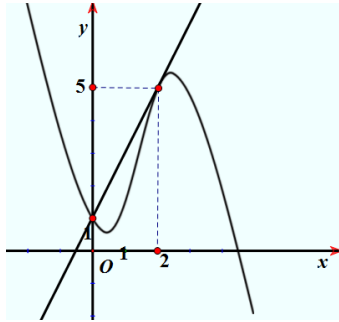
D. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ không có cực trị tại $x = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = f'(x) - 2x - 1$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1$ (1).

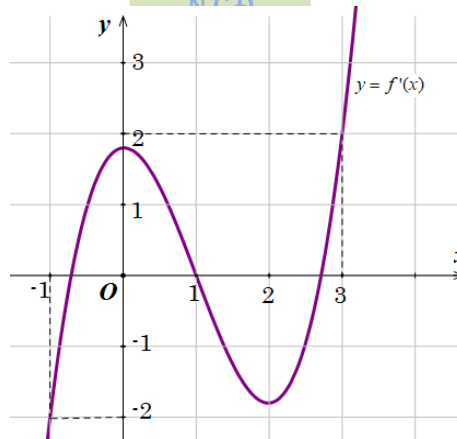


Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2x + 1$ ta có thể nhận thấy phương trình (1) có ít nhất 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 2$.

Xét dấu $x = 1 \in (0; 2)$, ta có $y'(1) = f'(1) - 5 < 0$ từ đó ta nhận định hàm số

$y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực đại tại $x = 0$. Ta chọn đáp án A.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

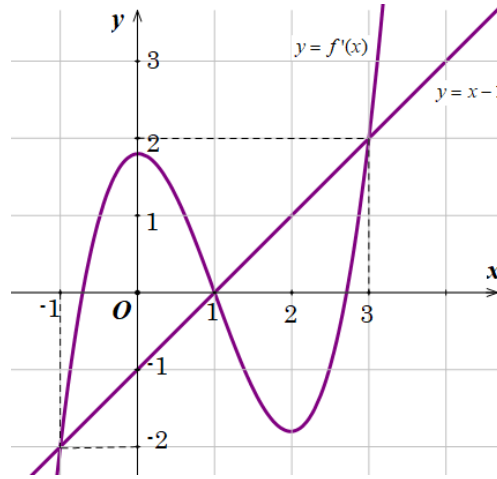
- A.** Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.
- B.** Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
- C.** Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.
- D.** Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x) - (x - 1)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1$ đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x - 1$.

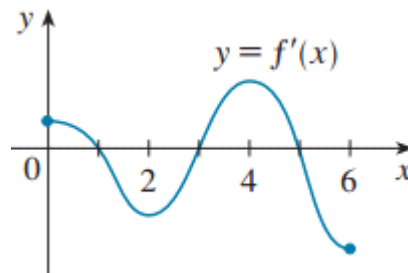


Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x - 1$ ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 1, x = 3$
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$		$g(-1)$	$g(1)$	$g(3)$	

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2 + 2019$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $[0; 6]$.



A. 7.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 2f(x)f'(x); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 5 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 6]$:

x	0	1	3	5	6			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$								

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x)=0$ có tối đa 4 nghiệm phân biệt trong $[0;6]$ là $x_1 \in (0;1)$, $x_2 \in (1;3)$, $x_3 \in (3;5)$, $x_4 \in (5;6)$.

Vậy hàm số $y=[f(x)]^2+2019$ có tối đa 7 điểm cực trị trên đoạn $[0;6]$.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	-1	3	5	$+\infty$					
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$					
$f(x)$	$+\infty$		-2		1		3		0		$-\infty$

Xét hàm số $y=g(x)=f(|x-4|)+2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng

A. 5.

B. 1.

C. 9.

D. 2.

Lời giải

N.C.Đ

Chọn A

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.

Khi đó hàm số $y=f(x-4)$ có đồ thị (C') với (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến sang phải 4 đơn vị.

Từ bảng biến thiên của hàm $y=f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(x-4)$ là :

x	$-\infty$	2	3	7	9	$+\infty$
$y = f(x-4)$	$+\infty$		1		3	
		-2		0		$-\infty$

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(|x-4|)$ là

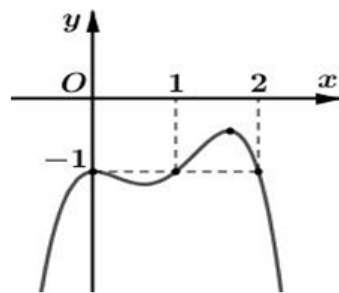
x	$-\infty$	-1	1	4	7	9	$+\infty$
$y=f(x-4)$							

Vậy hàm số $y=f(|x-4|)$ cho có 5 cực trị.

Do đó hàm số $y=g(x)=f(|x-4|)+2018^{2019}$ có 5 cực trị.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ.

Hàm số $g(x)=f(x)+x$ đạt cực tiểu tại điểm.



A. $x = 1$.

B. $x = 2$.

C. không có điểm cực tiểu. **D.** $x = 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x) + 1$. Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1$ (1).

Nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -1$ có

ba điểm chung có hoành độ là 0; 1; 2. Do đó $f'(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

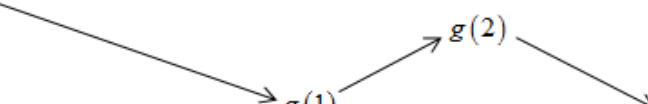
N.C.Đ

Trên $(-\infty; 1)$ đường thẳng $y = -1$ tiếp xúc hoặc nằm trên đồ thị hàm số $y = f'(x)$.

Trên $(1; 2)$ đường thẳng $y = -1$ nằm dưới đồ thị hàm số $y = f'(x)$.

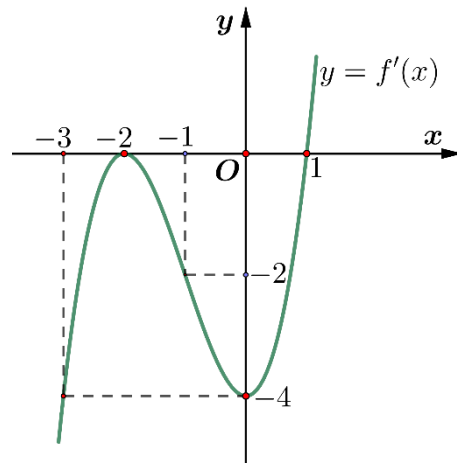
Trên $(2; +\infty)$ đường thẳng $y = -1$ nằm trên đồ thị hàm số $y = f'(x)$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$			
$g'(x)$		-	0	-	0	+	0	-
$g(x)$								

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x)$ là

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 - 3 = 0 & (1) \\ f'(x^3 - 3x) = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Dựa vào đồ thị đã cho thì $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = -2 \\ x^3 - 3x = 1 \end{cases}$

Trong đó phương trình $x^3 - 3x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

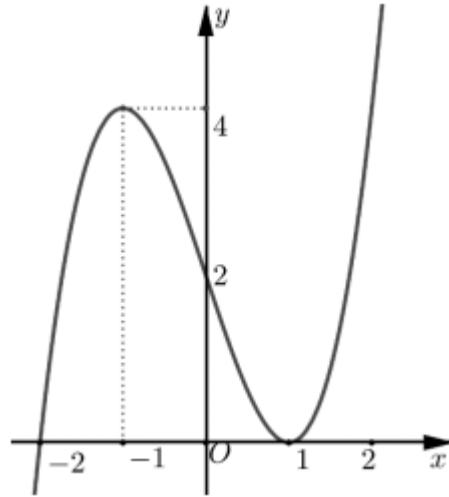
Còn phương trình: $x^3 - 3x = 1$ có 3 nghiệm phân biệt: $-2 < x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 0$ và $1 < x_3 < 2$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-2		x_1	-1		x_2	1		x_3	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$											

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực đại

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x^2 - 2x)$ có $[f(x^2 - 2x)]' = 2(x-1)f'(x^2 - 2x)$

$$\text{Cho } [f(x^2 - 2x)]' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases}$$

Dựa theo đồ thị hàm số $f(x)$, ta thấy $f(x)$ có 2 cực trị tại $x = -1; x = 1$. Do đó

$$f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

+ Với $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ thì $0 < (x-1)^2 < 2 \Leftrightarrow -1 < x^2 - 2x < 1$. Khi đó, $f'(x^2 - 2x) < 0$ (theo đồ thị hàm số $f(x)$)

+ Với $x < 1 - \sqrt{2}$ hay $x > 1 + \sqrt{2}$ thì $(x-1)^2 > 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 1$. Khi đó, $f'(x^2 - 2x) > 0$ (theo đồ thị hàm số $f(x)$)

Từ đó, ta có bảng xét dấu của $[f(x^2 - 2x)]'$

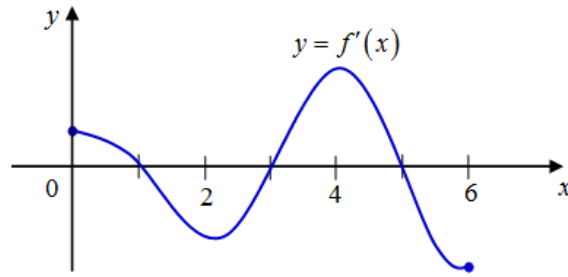
x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$[f(x^2-2x)]'$	-	0	+	0	+
$f(x^2-2x)$					

Bảng biến thiên của $y = f(x^2 - 2|x|)$ như sau

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	-1	0	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$y = f(x^2 - 2 x)$							

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có 5 cực trị.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị?



A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = [f(x)]^2 \Rightarrow y' = 2f(x) \cdot f'(x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 3; 5\}.$$

Dựa vào đồ thị hàm số của $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;6]$ là

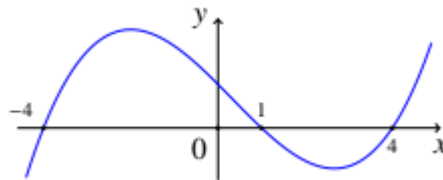
N.C.Đ

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có tối đa bốn nghiệm phân biệt với $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 5 < x_4 < 6$.

Do đó, phương trình $y' = 0$ có tối đa 7 nghiệm phân biệt và đều là nghiệm đơn.

Vậy hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa 7 cực trị.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(2x - x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 5.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

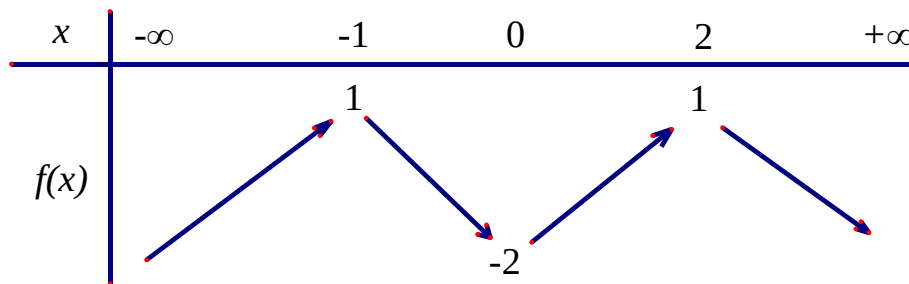
$$\text{Ta có: } y' = (2 - 2x) \cdot f'(2x - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x - x^2 = -4 \\ 2x - x^2 = 1 \\ 2x - x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{5}$	1	$1+\sqrt{5}$	$+\infty$		
$2-2x$	+		+	0	-		-
$f'(2x-x^2)$	-	0	+		+	0	-
y'	-	0	+	0	-	0	+

Suy ra hàm số có 1 cực đại.

Lưu ý: Ở bài toán này, vấn đề mấu chốt là chúng ta phải xét dấu được lượng $f'(2x-x^2)$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(-x+3)$ đạt cực đại tại



A. $x = -1$

B. $x = 2$.

C. $x = 0$.

D. $x = 3$.

Lời giải

N.C.Đ

Chọn D

Đặt $-x+3=t$.

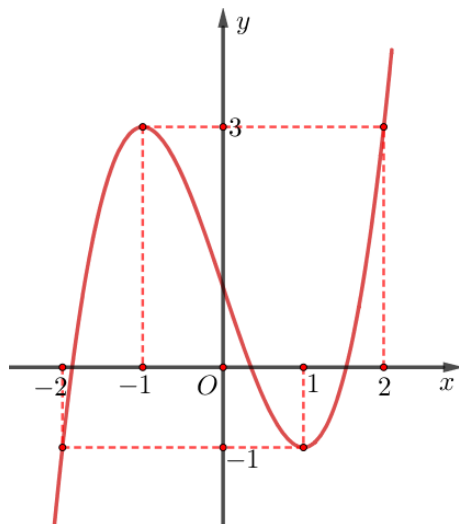
Ta thấy $[f(-x+3)]' = -f'(-x+3) = -f'(t)$ nên để hàm số $y = f(-x+3)$ đạt cực đại thì hàm số $y = f(t)$ phải đạt cực tiểu

Theo bảng biến thiên thì hàm số $y = f(t)$ đạt cực tiểu tại $t = 0$

Suy ra hàm số $y = f(-x+3)$ đạt cực đại tại $-x+3=0$ hay $x=3$

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$

có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 6.

B. 8.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

Gọi các nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ lần lượt là $x_1; x_2; x_3$ trong đó

$$x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3.$$

$$y = \begin{cases} f(x), \forall x \in (0; x_2) \cup (x_3; +\infty) \\ f(|x|) \text{ khi } f(|x|) \geq 0 \\ -f(x), \forall x \in (x_2; x_3) \\ -f(|x|) \text{ khi } f(|x|) < 0 \\ f(-x), \forall x \in (-\infty; -x_3) \cup (-x_2; 0) \\ -f(-x), \forall x \in (-x_3; -x_2) \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} f'(x), \forall x \in (0; x_2) \cup (x_3; +\infty) \\ -f'(x), \forall x \in (x_2; x_3) \\ -f'(-x), \forall x \in (-\infty; -x_3) \cup (-x_2; 0) \\ f'(-x), \forall x \in (-x_3; -x_2) \end{cases}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$y' \text{ không xác định tại } \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm x_2 \\ x = \pm x_3 \end{cases}$$

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(|x|)|$ như sau:

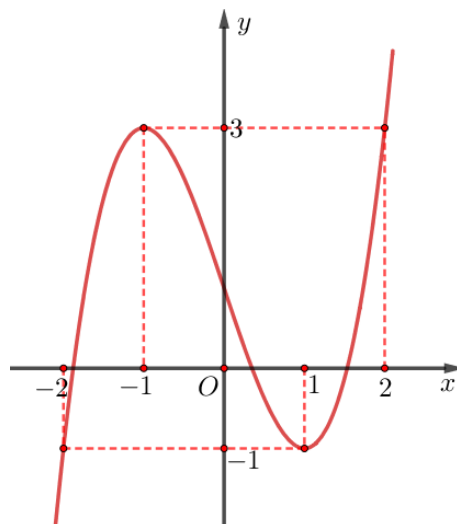
x	$-\infty$	$-x_3$	-1	$-x_2$	0	x_2	1	x_3	$+\infty$
y'		-	+	0	-	+	0	-	+
y		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Nên hàm số có 7 cực trị.

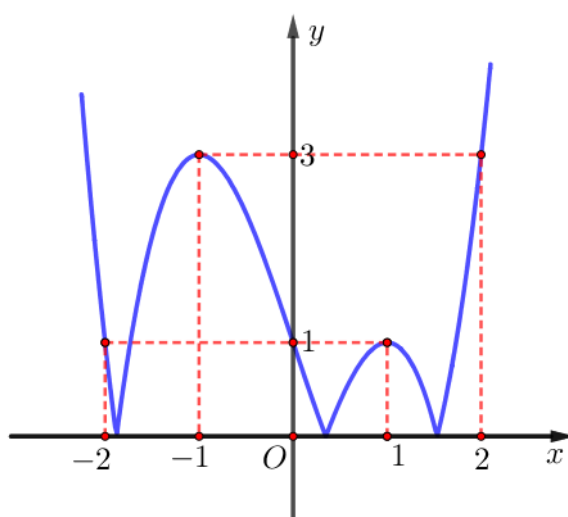
Cách 2:

Hàm số $y = f(x)$ có một cực trị dương là $x = 1$ và phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm dương nên hàm số $y = f(|x|)$ có 3 cực trị và phương trình $f(|x|) = 0$ có 4 nghiệm nên hàm số $y = |f(|x|)|$ có 7 cực trị.

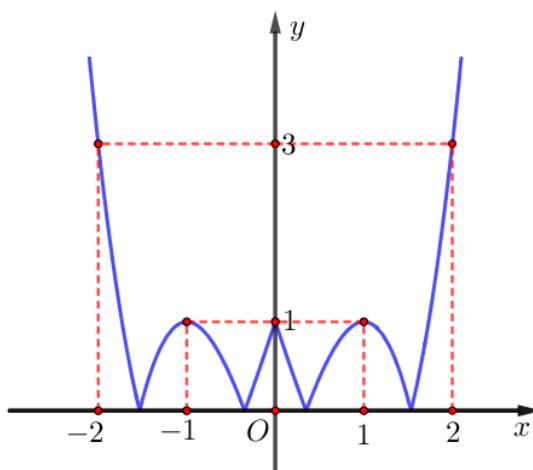
Cách khác: Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$



Ta có đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ là:

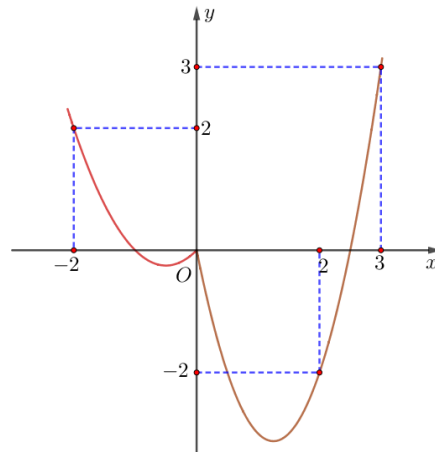


Và đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ là:



Từ đồ thị suy ra hàm số $y = |f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $y = \left| f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0) \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$?



A. 6.

B. 8.

C. 3.

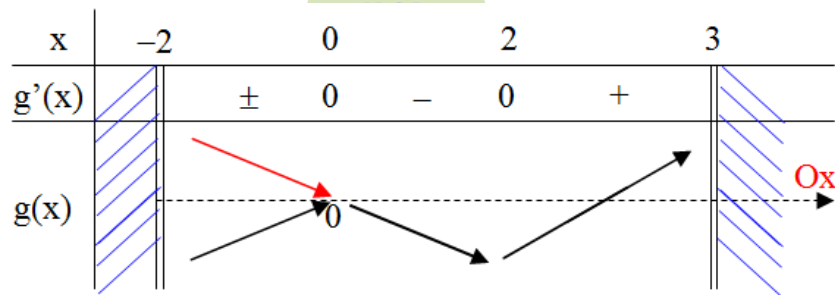
D. 5.

Bài giải

$$\text{Đặt } g(x) = f(x) + \frac{x^2}{2} - f(0)$$

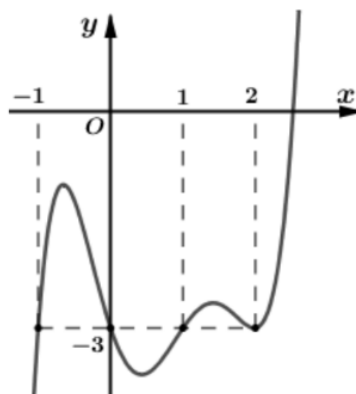
$$\text{Ta có: } g'(x) = f'(x) + x, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(L) \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

(Nhận xét: $x = 2$ là nghiệm bội lẻ, $x = 0$ có thể nghiệm bội lẻ hoặc nghiệm bội chẵn tuy nhiên không ảnh hưởng đáp số bài toán)



Suy ra hàm số $y = |g(x)|$ có nhiều nhất 3 điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$

Câu 43. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $h(x) = f(x) + 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$h'(x) = f'(x) + 3, x \in \mathbb{R}.$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Với $x = 2$ là nghiệm kép vì qua nghiệm $x = 2$ thì $h'(x)$ không đổi dấu.

Dựa vào đồ thị hàm số của $f'(x)$, ta có: $\begin{cases} f'(x) < -3 \quad \forall x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \\ f'(x) > -3 \quad \forall x \in (-1; 0) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty) \end{cases}$.

Mặt khác $h(0) = f(0) + 3 \cdot 0 < 0$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x) = f(x) + 3x$:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0
$h(x)$	$+\infty$		$h(0)$		$h(2)$	$+\infty$

Đồ thị của $h(x)$ có dạng chữ W, với các điểm cực trị tại $x = -1$ (cực tiểu), $x = 0$ (cực đại), $x = 1$ (cực tiểu), $x = 2$ (cực đại). Các điểm này được đánh dấu bằng các mũi tên và các giá trị $h(-1)$, $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$ trên trục tung.

Từ đó ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x) = |f(x) + 3x| = |h(x)|$:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$-h(-1)$	$-h(0)$	$-h(1)$	$-h(2)$	$+\infty$

Đồ thị của $g(x)$ có dạng chữ M, với các điểm cực trị tại $x = -1$ (cực đại), $x = 0$ (cực tiểu), $x = 1$ (cực đại), $x = 2$ (cực tiểu). Các điểm này được đánh dấu bằng các mũi tên và các giá trị $-h(-1)$, $-h(0)$, $-h(1)$, $-h(2)$ trên trục tung.

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x) = |f(x) + 3x| = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Đồ thị của $y = f(x)$ có dạng chữ M, với các điểm cực trị tại $x = -1$ (cực đại), $x = 0$ (cực tiểu), $x = 1$ (cực đại). Các điểm này được đánh dấu bằng các mũi tên và các giá trị -2 , -1 , -2 trên trục tung.

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2f^3(x) + 4f^2(x) + 1$ là



A. 4.

B. 9.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$g'(x) = 6f'(x)f^2(x) + 8f'(x)f(x) = 2f'(x)f(x)(3f(x) + 4).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có:

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

+ Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm x_1 và x_2 (giả sử $x_1 < x_2$). Suy ra $x_1 < -1$ và $1 < x_2$.

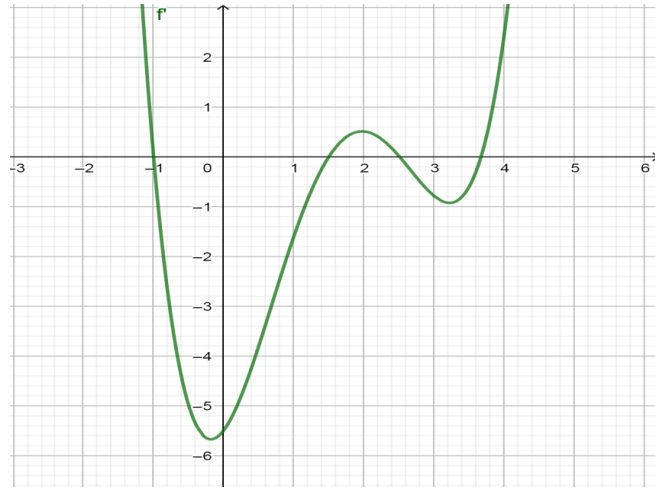
+ Phương trình $f(x) = -\frac{4}{3}$ có 4 nghiệm x_3, x_4, x_5, x_6 (giả sử $x_3 < x_4 < x_5 < x_6$). Và 4 giá trị thỏa mãn yêu cầu sau: $x_1 < x_3 < -1; -1 < x_4 < 0; 0 < x_5 < 1; 1 < x_6 < x_2$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	x_1	x_3	-1	x_4	0	x_5	1	x_6	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0
$3f(x) + 4$	+	+	0	-	-	0	+	+	0	-	+
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$											

Suy ra hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực tiểu.

Câu 45. Cho hàm số đa thức $f(x) = mx^5 + nx^4 + px^3 + qx^2 + hx + r$, ($m, n, p, q, h, r \in \mathbb{R}$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ (như hình vẽ bên dưới) cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là $-1; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{11}{3}$.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) - (m + n + p + q + h + r)|$ là

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Vì $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{11}{3}$ là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ nên:

$$f'(x) = 5mx^4 + 4nx^3 + 3px^2 + 2qx + h = 5m(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{11}{3}\right).$$

$$\text{Suy ra } 5mx^4 + 4nx^3 + 3px^2 + 2qx + h = 5m\left(x^4 - \frac{20}{3}x^3 + \frac{43}{4}x^2 + \frac{14}{3}x - \frac{55}{4}\right).$$

$$\text{Đồng nhất hệ số, ta được } n = \frac{-25}{3}m; p = \frac{215}{12}m; q = \frac{35}{3}m; h = \frac{-275}{4}m.$$

$$\text{Suy ra } g(x) = \left| f(x) + \frac{93}{2}m - r \right|$$

$$\square \quad \text{Xét } h(x) = f(x) + \frac{93}{2}m - r.$$

$\Rightarrow h'(x) = f'(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt, nên $h(x)$ có bốn cực trị.

$$\square \quad \text{Xét } h(x) = 0 \Leftrightarrow mx^5 - \frac{25}{4}mx^4 + \frac{215}{12}mx^3 + \frac{35}{3}mx^2 - \frac{274}{4}mx + r = \frac{-93}{2}m + r$$

$$\Leftrightarrow x^5 - \frac{25}{4}x^4 + \frac{215}{12}x^3 + \frac{35}{3}x^2 - \frac{274}{4}x + \frac{93}{2} = 0.$$

$$\text{Đặt } k(x) = x^5 - \frac{25}{4}x^4 + \frac{215}{12}x^3 + \frac{35}{3}x^2 - \frac{274}{4}x + \frac{93}{2}.$$

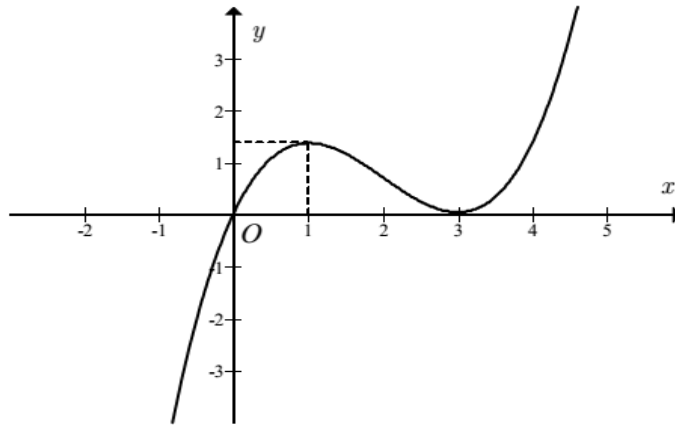
x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{3}$	$+\infty$	
$k'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{299}{3}$	$\searrow -\frac{9}{2}$	$\nearrow -\frac{3}{8}$	$\searrow k(\frac{11}{3}) < 0$	$\nearrow +\infty$	



Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình $h(x) = 0 \Leftrightarrow k(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-100; 100]$ để hàm số $h(x) = |f^2(x+2) + 4f(x+2) + 3m|$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. 5047 .

B. 5049 .

C. 5050 .

D. 5043 .

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x) = f^2(x+2) + 4f(x+2) + 3m \Rightarrow g'(x) = 2f(x+2) \cdot f'(x+2) + 4f'(x+2)$

$$g'(x) = 2f'(x+2) \cdot [f(x+2) + 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x+2) = 0 \\ f(x+2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 1 \\ x+2 = 3 \\ x+2 = a \in (-1; 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = a - 2 \in (-3; -2) \end{cases} \text{ là 3 nghiệm đơn của } g'(x) = 0.$$

Suy ra hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Đặt $t = f(x+2) \Rightarrow t \in \mathbb{R}$ và mỗi giá trị $t \in \mathbb{R}$ thì phương trình $t = f(x+2)$ luôn có nghiệm.

$$g(x) = f^2(x+2) + 4f(x+2) + 3m \Rightarrow h(t) = t^2 + 4t + 3m$$

Vì hàm số $g(x)$ có 3 cực trị nên để hàm số $y = |g(x)|$ có 3 điểm cực trị thì.

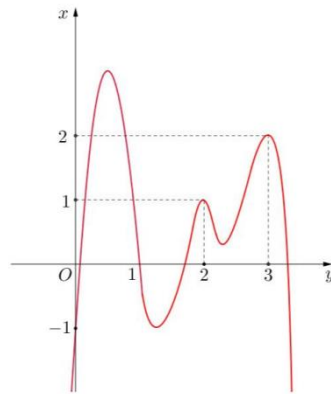
$$t^2 + 4t + 3m \geq 0, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{3}. \text{ (Vì hàm } y = h(t) \text{ là hàm bậc hai có hệ số } a > 0)$$

Do $m \in [-100; 100]; m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2, 3, 4, \dots, 100\}$.

Vậy tổng các giá trị của m là $2 + 3 + 4 + \dots + 100 = 5049$.



Câu 47. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = |2f(x) - (x-1)^2|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 9.

B. 3.

C. 7.

D. 5.**Lời giải****Chọn D**

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$.

♦ Tìm số điểm cực trị của $g(x)$

Ta có : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x-1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

N.C.Đ

Kẻ đường thẳng $y = x-1$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ

$x=0; x=1; x=2; x=3$ trong đó tại các điểm có hoành độ $x=2; x=3$ là các điểm tiếp xúc, do đó $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua các điểm $x=0; x=1$. Vì vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị $x=0; x=1$

♦ Ta tìm số nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Bảng biến thiên:

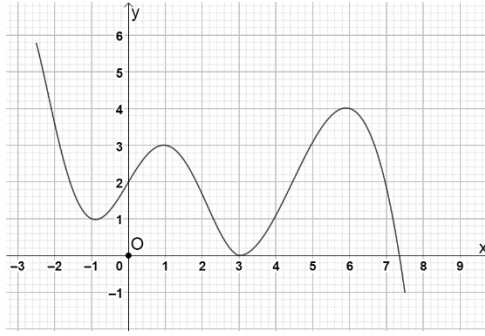
x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	-
$g(x)$	$+\infty$	$g(0)$	$g(1)$			$-\infty$	

A hand-drawn diagram illustrating the variation of the function $g(x)$. A horizontal line represents the $y=0$ axis. The curve starts at $+\infty$ on the left, crosses the $y=0$ line at a point labeled $g(0)$, reaches a local maximum at a point labeled $g(1)$, crosses the $y=0$ line again, and then goes down to $-\infty$ on the right.

Suy ra phương trình có tối đa ba nghiệm phân biệt.

♦ Vậy hàm số $y = |g(x)|$ có tối đa $2 + 3 = 5$ điểm cực trị.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 2019^{f(f(x)-1)}$.



A. 13.

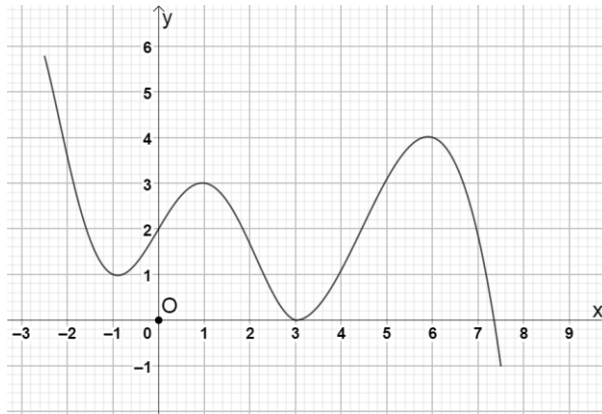
B. 11.

C. 10.

D. 12.

Lời giải

Chọn D



Ta có $y' = f'(x) f'(f(x)-1) 2019^{f(f(x)-1)} \ln 2019$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'(f(x)-1) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1): } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\text{Giải (2): } f'(f(x)-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-1 = -1 \\ f(x)-1 = 1 \\ f(x)-1 = 3 \\ f(x)-1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \\ f(x) = 4 \\ f(x) = 7 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta có

+) $f(x) = 0$ có 1 nghiệm $x_5 > 6$ là nghiệm bội 1,

+) $f(x) = 2$ có 5 nghiệm $x_6 < -1; -1 < x_7 < 1; 1 < x_8 < 3; 3 < x_9 < 6; 6 < x_{10} < x_5$ là các nghiệm bội 1,

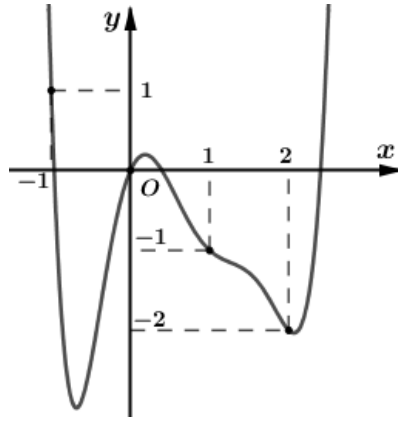
+) $f(x) = 4$ có 1 nghiệm $x_{11} < x_6$ là nghiệm bội 1,

+) $f(x) = 7$ có 1 nghiệm $x_{12} < x_{11}$ là nghiệm bội 1,

Suy ra $y' = 0$ có 12 nghiệm phân biệt mà qua đó y' đổi dấu.

Vậy hàm số $y = 2019^{f(f(x)-1)}$ có 12 điểm cực trị.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

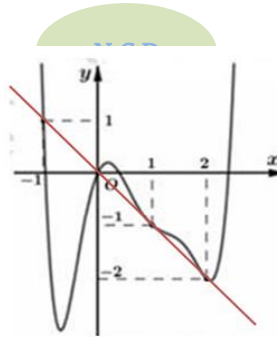
Chọn A

Ta có $g'(x) = 2f'(x+2) + 2x + 4$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2).$$

Đặt $t = x+2$ ta được $f'(t) = -t$. (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng $d : y = -t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y = -t$ ta có

$$\text{ta có } f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$						

Vậy đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.



N.C.Đ



CHỦ ĐỀ: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT
VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 1**TÌM GTLN – GTNN CỦA HÀM SỐ THEO CÔNG THỨC**

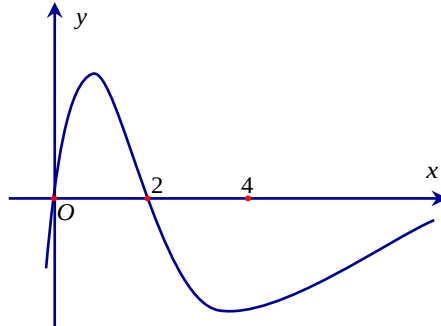
- Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+m}{x-1}$. Tính tổng các giá trị của tham số m để $\left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2$.
- A. -4. B. -2. C. -1. D. -3.
- Câu 2.** Gọi A, a lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$. Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để $Aa = 12$. Tổng các phần tử của S bằng
- A. 0. B. 2. C. -2. D. 1
- Câu 3.** Gọi T là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2; 3]$ bằng $\frac{5}{6}$. Tính tổng của các phần tử trong T .
- A. $\frac{17}{5}$. B. $\frac{16}{5}$. **N.C.Đ** C. 2. D. 6.
- Câu 4.** Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(ax^2 + 4ax - a + b - 2)$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$. Hỏi trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại giá trị nào của x ?
- A. $x = -\frac{5}{4}$. B. $x = -\frac{4}{3}$. C. $x = -\frac{3}{2}$. D. $x = -2$.
- Câu 5.** Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là
- A. 1. B. -4. C. 0. D. 4.
- Câu 6.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-1}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng 14.
- A. 2. B. 1. C. 0. D. 4.
- Câu 7.** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1.
- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.



Câu 8. Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

- A. $d - 11a$. B. $d - 16a$. C. $d + 2a$. D. $d + 8a$.

Câu 9. Cho hàm số có $f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$.



- A. $m = f(4), M = f(2)$. B. $m = f(1), M = f(2)$
C. $m = f(4), M = f(1)$. D. $m = f(0), M = f(2)$.

Câu 10. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 210. B. -195. C. 105. D. 300.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Số giá trị nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$ là

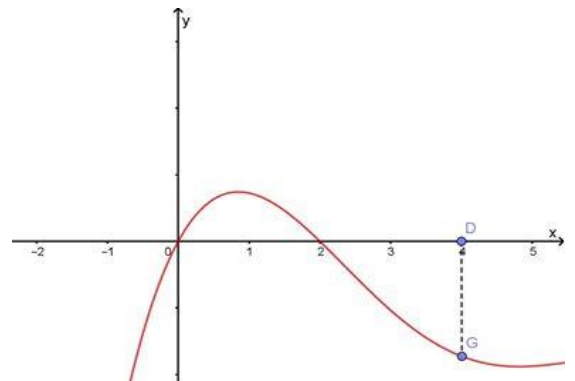
- A. 3. B. 5. C. 6. D. 7.

Câu 12. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2; 4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

- A. 4. B. 36. C. 140. D. 0.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ. Biết rằng $f(2) + f(4) = f(3) + f(0)$. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ lần lượt là

- A. $f(2), f(0)$. B. $f(4), f(2)$.
C. $f(0), f(2)$. D. $f(2), f(4)$.



Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.



x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						$-\infty$

$+\infty \searrow -3 \nearrow 5 \searrow -\infty$

- A. 15. B. $\frac{25}{3}$. C. $\frac{19}{3}$. D. 12.

Câu 15. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^4 - 38x^2 + 120x + 4m|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. 26. B. 13. C. 14. D. 27.

Câu 16. Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

- A. 2. B. 4. C. -4. D. 3.

Câu 17. Cho hàm số $y = (x^2 + x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị thực tham số m sao cho $\min_{[-2; 2]} y = 4$ bằng

- A. $-\frac{31}{4}$. B. -8. C. $-\frac{23}{4}$. D. $\frac{9}{4}$.

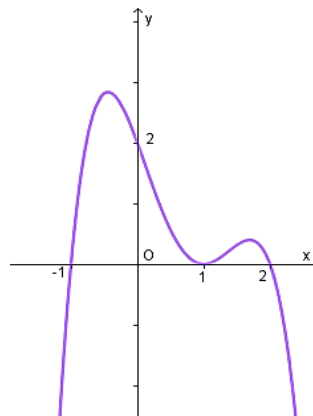
Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{x \in [0; 10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0; 2]} g(x) = 8$ là

- A. 5. B. 4. C. -1. D. 3.

Câu 19. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. $-\frac{8}{3}$. B. 5. C. $\frac{5}{3}$. D. -1.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + x - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. $f(-1) - \frac{5}{3}$. B. $f(1) - \frac{1}{3}$. C. $f(2) - \frac{5}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.



Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x.f(x) - x^2 f'(x) = 2f^2(x)$, với $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M + m$.

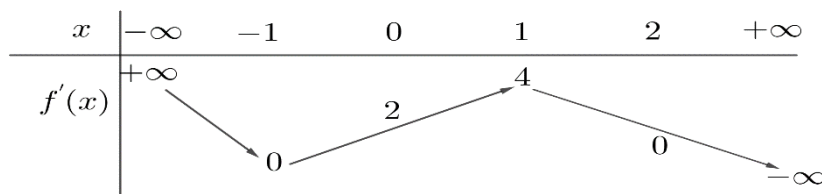
A. $\frac{9}{10}$.

B. $\frac{21}{10}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng $f(-1) = \frac{10}{3}$, $f(2) = 6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. $\frac{10}{3}$.

B. $\frac{820}{27}$.

C. $\frac{730}{27}$.

D. 198.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.

C. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

D. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x) - x]f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Giá trị của $3M - m$ bằng

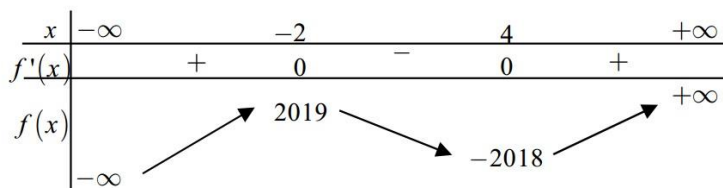
A. 4.

B. -28.

C. -3.

D. 33.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x) - \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x - \frac{2}{15}$ trên đoạn $[-1; 2]$?

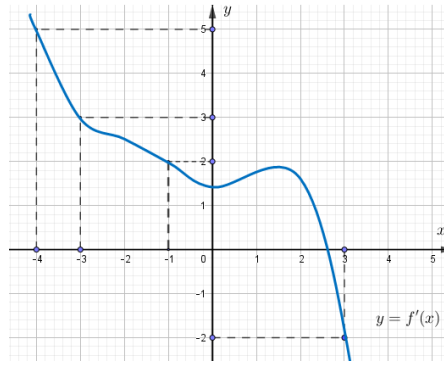
A. 2022.

B. 2019.

C. 2020.

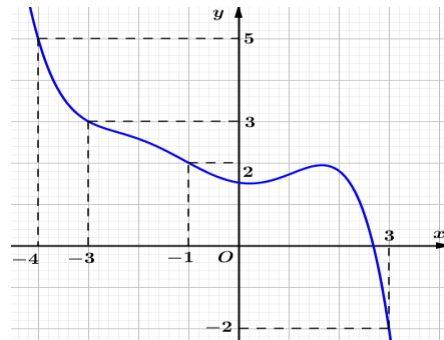
D. 2021.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



- A. $x_0 = -4$. B. $x_0 = -1$. C. $x_0 = 3$. D. $x_0 = -3$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm.



- A. $x_0 = -1$. B. $x_0 = 3$. C. $x_0 = -4$. D. $x_0 = -3$.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$?

- A. Vô số. B. 4. C. 6. D. 5.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{[-1;2]} f(x) = 3$. Xét $g(x) = f(3x-1) + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

- A. 13. B. -7. C. -13. D. -1.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -2017)$. B. $(2017; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(-2017; 0)$.

Câu 31. Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + m + 3| - 4x$ bằng -5.

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.



N.C.Đ



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+m}{x-1}$. Tính tổng các giá trị của tham số m để

$$\left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2.$$

A. -4.

B. -2.

C. -1.

D. -3.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = f(x) = \frac{2x+m}{x-1}$ xác định và liên tục trên $[2;3]$.

Với $m = -2$, hàm số trở thành $y = 2 \Rightarrow \max_{[2;3]} f(x) = \min_{[2;3]} f(x) = 2$ (không thỏa).

Với $m \neq -2$, ta có $y' = \frac{-2-m}{(x-1)^2}$.

Khi đó hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên $[2;3]$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \max_{[2;3]} f(x) = f(2); \min_{[2;3]} f(x) = f(3) \\ \max_{[2;3]} f(x) = f(3); \min_{[2;3]} f(x) = f(2) \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = |f(3) - f(2)| = \left| \frac{6+m}{2} - (4+m) \right| = \left| \frac{2+m}{2} \right|.$$

$$\text{Theo giả thiết } \left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{2+m}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -6 \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: -4.

Nhận xét: đề bài cho thêm dấu giá trị tuyệt đối ở trong biểu thức

$$\left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2 \text{ là không cần thiết.}$$

Câu 2. Gọi A, a lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0;2]$. Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để $Aa = 12$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0.

B. 2.

C. -2.

D. 1

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt: } u(x) = x^3 - 3x + m \Rightarrow u'(x) = 3x^2 - 3$$

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0;2] \\ x = -1 \notin [0;2] \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } u(0) = m; u(1) = m - 2; u(2) = m + 2$$

$$\text{Suy ra: } \max_{[0;2]} u(x) = m + 2; \min_{[0;2]} u(x) = m - 2 \Rightarrow \max_{[0;2]} y = \max \{|m + 2|; |m - 2|\}.$$

$$\text{TH1: } (m - 2) \cdot (m + 2) < 0 \Rightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow a = \min_{[0;2]} y = 0 \text{ (loại)}$$

(vì ko thỏa mãn giả thiết $Aa = 12$)



$$\text{TH 2: } m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2 \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Min}} y = m - 2; A = \underset{[0;2]}{\text{Max}} y = m + 2.$$

$$\text{Từ giả thiết: } Aa = 12 \Rightarrow (m + 2)(m - 2) = 12 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4(TM) \\ m = -4(ko TM) \end{cases}$$

$$\text{TH 3: } m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2 \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Min}} y = -(m + 2); \underset{[0;2]}{\text{Max}} y = -(m - 2).$$

$$\text{Từ giả thiết: } Aa = 12 \Rightarrow (m + 2)(m - 2) = 12 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4(ko TM) \\ m = -4(TM) \end{cases}$$

Kết hợp các trường hợp suy ra: $S = \{-4; 4\}$

Vậy tổng các phần tử của S bằng: $(-4) + 4 = 0$.

Câu 3. Gọi T là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2; 3]$ bằng $\frac{5}{6}$. Tính tổng của các phần tử trong T .

A. $\frac{17}{5}$.

B. $\frac{16}{5}$.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$.

Điều kiện $x \neq -m^2$.

$$y = \frac{mx+1}{x+m^2} \Rightarrow y' = \frac{m^3-1}{(x+m^2)^2}.$$

- Nếu $m = 1$ thì $y = \frac{x+1}{x+1}$. Khi đó $\max_{[2;3]} y = 1$, suy ra $m = 1$ không thỏa mãn.

- Nếu $m^3 - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $y' > 0$. Suy ra hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ đồng biến trên đoạn $[2; 3]$.

$$\text{Khi đó } \max_{[2;3]} y = y(3) = \frac{3m+1}{3+m^2} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 5m^2 - 18m + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện $m > 1$, ta có $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $m^3 - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $y' < 0$. Suy ra hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ nghịch biến trên đoạn $[2; 3]$.

$$\text{Khi đó } \max_{[2;3]} y = y(2) = \frac{2m+1}{2+m^2} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 5m^2 - 12m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện $m < 1$, ta có $m = \frac{2}{5}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $T = \left\{ 3; \frac{2}{5} \right\}$. Do đó tổng các phần tử của T là $3 + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$.



Câu 4. Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(ax^2 + 4ax - a + b - 2)$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$. Hỏi trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại giá trị nào của x ?

A. $x = -\frac{5}{4}$.

B. $x = -\frac{4}{3}$.

C. $x = -\frac{3}{2}$.

D. $x = -2$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.Ta có: $f'(x) = 2(x-1)(2ax^2 + 5ax - 3a + b - 2)$.

Vì trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = -1$ (cũng là điểm cực đại của hàm số) và $a > 0$.

$$\Rightarrow f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4(-6a + b - 2) = 0 \Leftrightarrow b = 6a + 2.$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2a(x-1)(2x^2 + 5x + 3).$$

$$\text{Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ (đều là các nghiệm đơn)}$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ nên có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$								$+\infty$

$\swarrow$ CT $\nearrow$ CĐ $\searrow$ CT $\nearrow$ CT

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ là điểm cực tiểu duy nhất thuộc } \left[-2; -\frac{5}{4}\right].$$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{3}{2}$ trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$.

Câu 5. Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là

A. 1.

B. -4.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn C



Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$.

Để GTNN của hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 thì $\min_{[-1;1]} f(x) = 1$ hoặc

$$\max_{[-1;1]} f(x) = -1.$$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$.

Suy ra $\max_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = 2 + m$ và $\min_{[-1;1]} f(x) = f(1) = -2 + m$.

Trường hợp 1: $\min_{[-1;1]} f(x) = 1 \Leftrightarrow -2 + m = 1 \Leftrightarrow m = 3$.

Trường hợp 2: $\max_{[-1;1]} f(x) = -1 \Leftrightarrow 2 + m = -1 \Leftrightarrow m = -3$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m là 0.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-1}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng 14.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{-1-m^2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$.

N.C.Đ

Do đó hàm số nghịch biến trên đoạn $[2; 3]$.

Suy ra $\min_{[2;3]} y = y(3) = \frac{3+m^2}{3-1} = 14 \Leftrightarrow m = \pm 5$. Vậy có 1 giá trị nguyên dương của m .

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 .

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \neq m$.

Hàm số đã cho xác định trên $[0; 4]$ khi $m \notin [0; 4]$ (*).

Ta có $y' = \frac{m^2 - m + 2}{(x-m)^2} = \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}{(x-m)^2} > 0$ với $\forall x \in [0; 4]$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 4]$ nên $\max_{[0;4]} y = y(4) = \frac{2-m^2}{4-m}$.

$\max_{[0;4]} y = -1 \Leftrightarrow \frac{2-m^2}{4-m} = -1 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$.



Kết hợp với điều kiện (*) ta được $m = -3$. Do đó có một giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8. Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số

$y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

A. $d - 11a$.

B. $d - 16a$.

C. $d + 2a$.

D. $d + 8a$.

Lời giải

Tác giả: Đinh Thị Thúy Nhung; Fb: Thúy Nhung Đinh

Chọn B

Vì $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ là hàm số bậc ba và có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$ nên $a < 0$ và $y' = 0$ có

hai nghiệm phân biệt.

Ta có $y' = 3ax^2 + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ac < 0$.

Vậy với $a < 0$, $c > 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm đối nhau $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{3a}}$

Từ đó suy ra $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f\left(-\sqrt{-\frac{c}{3a}}\right) \Leftrightarrow -\sqrt{-\frac{c}{3a}} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{c}{3a}} = 2 \Leftrightarrow c = -12a$

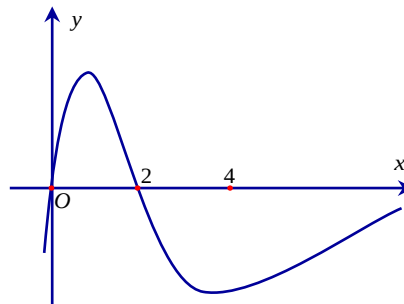
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	1	2	3	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				$f(2)$		$-\infty$

$\swarrow$ $f(-2)$ $\nearrow$ $\searrow$

Ta suy ra $\max_{x \in [1; 3]} f(x) = f(2) = 8a + 2c + d = -16a + d$.

Câu 9. Cho hàm số có $f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$.



A. $m = f(4), M = f(2)$.

B. $m = f(1), M = f(2)$

C. $m = f(4), M = f(1)$.

D. $m = f(0), M = f(2)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ ta có bảng biến thiên.



x	0	2	4	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

$f(0)$

$f(2)$

$f(4)$

Vậy giá trị lớn nhất $M = f(2)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ nên $f(2) > f(1) \Rightarrow f(2) - f(1) > 0$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$ nên $f(2) > f(3) \Rightarrow f(2) - f(3) > 0$.

Theo giả thuyết: $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$

$$\Leftrightarrow f(0) - f(4) = f(2) - f(1) + f(2) - f(3) > 0 \Rightarrow f(0) > f(4)$$

Vậy giá trị nhỏ nhất $m = f(4)$.

Câu 10. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210.

B. -195.

C. 105.

D. 300.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20$ trên đoạn $[0; 2]$.

$$f'(x) = x^3 - 19x + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 2 \in [0; 2] \\ x = 3 \notin [0; 2] \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	2
$f'(x)$		+
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$

với $f(0) = m - 20$; $f(2) = m + 6$.

Xét hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$.

+ Trường hợp 1: $m - 20 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 20$. Ta có



$\text{Max}_{[0;2]} y = m+6 \leq 20 \Leftrightarrow m \leq 14$. Kết hợp $m \geq 20$ suy ra không có giá trị m .

+ Trường hợp 2: $m+6 \geq 20-m \Leftrightarrow m \geq 7$. Ta có:

$\text{Max}_{[0;2]} y = m+6 \leq 20 \Leftrightarrow m \leq 14$. Kết hợp $m \geq 7$ suy ra $7 \leq m \leq 14$.

Vì m nguyên nên $m \in \{7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$.

+ Trường hợp 3: $20-m \geq m+6 \Leftrightarrow m \leq 7$. Ta có:

$\text{Max}_{[0;2]} y = 20-m \leq 20 \Leftrightarrow m \geq 0$. Kết hợp $m \leq 7$ suy ra $0 \leq m \leq 7$.

Vì m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Vậy $S = \{0; 1; 2; \dots; 14\}$. Tổng các phần tử của S bằng $\frac{(14+0) \cdot 15}{2} = 105$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Số giá trị nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$ là

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Xét $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$ với $x \in [0; 2]$.

N.C.Đ

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$g(0) = a; g(1) = 1 + a; g(2) = a.$$

Bảng biến thiên $g(x)$

x	0	1	2
$g'(x)$	0	0	0
$g(x)$	a	$a+1$	a

Trường hợp 1: $a \geq 0$. Khi đó $M = a+1; m = a$.

Ta có $M \leq 2m \Leftrightarrow 1+a \leq 2a \Leftrightarrow a \geq 1$. Với $\begin{cases} a \in [-3; 3] \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{1; 2; 3\}$.

Trường hợp 2: $a+1 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -1$. Khi đó $M = -a; m = -(a+1)$.

Ta có $M \leq 2m \Leftrightarrow -a \leq -2(a+1) \Leftrightarrow a \leq -2$. Với $\begin{cases} a \in [-3; 3] \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{-3; -2\}$.

Trường hợp 3: $-1 < a < 0$. Với $\begin{cases} a \in [-3; 3] \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \emptyset$.



Vậy có 5 giá trị a cần tìm.

Câu 12. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2; 4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

A. 4.

B. 36.

C. 140.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m$ có $g'(x) = 3x^2 - 6x$. Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ trên $[-2; 4]$ là:

$$\max_{x \in [-2; 4]} y = \max \{y(0); y(-2); y(2); y(4)\} = \max \{|m|; |m-4|; |m-20|; |m+16|\}.$$

Trường hợp 1: Giả sử $\max y = |m| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 50 \\ m = -50 \end{cases}$.

Với $m = 50$ thì $|m+16| = 66 > 50$ (loại).

Với $m = -50$ thì $|m-20| = 70 > 50$ (loại).

Trường hợp 2: Giả sử $\max y = |m-4| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 54 \\ m = -46 \end{cases}$.

Với $m = 54 \Rightarrow |m| = 54 > 50$ (loại).

N.C.Đ

Với $m = -46$ thì $|m-20| = 66 > 50$ (loại).

Trường hợp 3: Giả sử $\max y = |m-20| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 70 \\ m = -30 \end{cases}$

Với $m = 70$ thì $|m+16| = 86 > 50$ (loại).

Với $m = -30$ thì $|m+16| = 14 < 50$, $|m| = 30 < 50$; $|m-4| = 34 < 50$ (thỏa mãn).

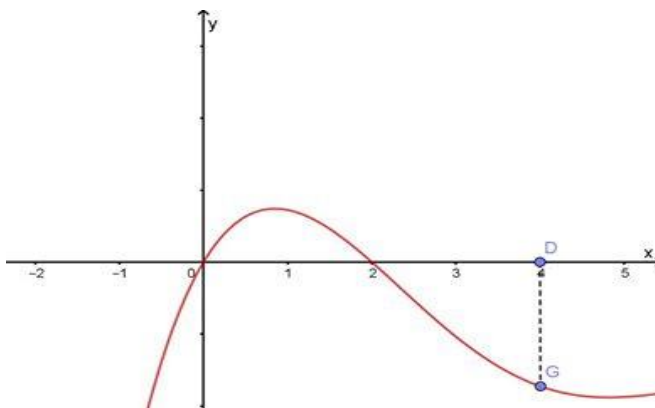
Trường hợp 4: Giả sử $\max y = |m+16| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 34 \\ m = -66 \end{cases}$.

Với $m = 34$ thì $|m| = 34 < 50$, $|m-4| = 30 < 50$, $|m-20| = 14 < 50$ (thỏa mãn).

Với $m = -66$ thì $|m| = 66 > 50$ (loại).

Vậy $S \in \{-30; 34\}$. Do đó tổng các phần tử của S là: $-30 + 34 = 4$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ.





Biết rằng $f(2) + f(4) = f(3) + f(0)$. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ lần lượt là

- A. $f(2), f(0)$. B. $f(4), f(2)$. C. $f(0), f(2)$. D. $f(2), f(4)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$.

x	0	2	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(4)$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{[0;4]} f(x) = f(2)$.

Ta có $f(2) + f(4) = f(3) + f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(4) = f(2) - f(3) > 0$.

Suy ra: $f(4) < f(0)$. Do đó $\min_{[0;4]} f(x) = f(4)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ lần lượt là: $f(4), f(2)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$					
	</					

- A. 15. B. $\frac{25}{3}$. C. $\frac{19}{3}$. D. 12.

Lời giải

Chọn D

$$g'(x) = (4 - 2x)f'(4x - x^2) + x^2 - 6x + 8 = (2 - x)[2f'(4x - x^2) + 4 - x].$$

Với $x \in [1; 3]$ thì $4 - x > 0$; $3 \leq 4x - x^2 \leq 4$ nên $f'(4x - x^2) > 0$.

Suy ra $2f'(4x - x^2) + 4 - x > 0, \forall x \in [1; 3]$.

Bảng biến thiên



x	1	2	3
g'		+	0
g			-

Suy ra $\max_{[1;3]} g(x) = g(2) = f(4) + 7 = 12$.

Câu 15. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^4 - 38x^2 + 120x + 4m|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 26 .

B. 13 .

C. 14 .

D. 27 .

Lời giải

Chọn D

Xét $u(x) = x^4 - 38x^2 + 120x + 4m$ trên đoạn $[0; 2]$ ta có

$$u' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 76x + 120 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 2 \in [0; 2] \\ x = 3 \notin [0; 2] \end{cases} .$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \max_{[0;2]} u(x) = \max \{u(0), u(2)\} = \max \{4m, 4m + 104\} = 4m + 104 \\ \min_{[0;2]} u(x) = \min \{u(0), u(2)\} = \min \{4m, 4m + 104\} = 4m \end{cases} .$$

Cách 1:

Nếu $4m > 0$ thì $\min_{[0;2]} f(x) = 4m > 0$

Nếu $4m + 104 < 0 \Leftrightarrow m < -26$ thì $\min_{[0;2]} f(x) = -4m - 104 > 0$

Nếu $4m \leq 0 \leq 4m + 104 \Leftrightarrow -26 \leq m \leq 0$ thì $\min_{[0;2]} f(x) = 0$. Vậy có 27 số nguyên thỏa mãn.

Cách 2:

Khi đó $\min \left\{ \min_{[0;2]} y \right\} = 0 \Leftrightarrow 4m(4m + 104) \leq 0 \Leftrightarrow -26 \leq m \leq 0$. Có 27 số nguyên thỏa mãn.

Câu 16. Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

A. 2 .

B. 4 .

C. -4 .

D. 3 .

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$. Theo đề bài, M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \begin{cases} M \geq f(-1) \\ M \geq f(3) \\ M \geq f(1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} M \geq |1 - a + b| \\ M \geq |9 + 3a + b| \\ M \geq |1 + a + b| \end{cases} \Rightarrow 4M \geq |1 - a + b| + |9 + 3a + b| + 2|-1 - a - b| \\ &\geq |1 - a + b + 9 + 3a + b + 2(-1 - a - b)| \Rightarrow 4M \geq 8 \Rightarrow M \geq 2. \end{aligned}$$



Nếu $M = 2$ thì điều kiện cần là $|1 - a + b| = |9 + 3a + b| = |-1 - a - b| = 2$ và $1 - a + b, 9 + 3a + b, -1 - a - b$ cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = 2 \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$.

Ngược lại, khi $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ ta có, hàm số $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$ trên $[-1; 3]$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 1$ xác định và liên tục trên $[-1; 3]$.

$$g'(x) = 2x - 2; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 3]$$

M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1; 3] \Rightarrow M = \max\{|g(-1)|; |g(3)|; |g(1)|\} = 2$.

Vậy $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$. Ta có: $a + 2b = -4$.

Câu 17. Cho hàm số $y = (x^2 + x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị thực tham số m sao cho $\min_{[-2; 2]} y = 4$ bằng

A. $-\frac{31}{4}$.

B. -8 .

C. $-\frac{23}{4}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xét $u = x^2 + x + m$ trên đoạn $[-2; 2]$ ta có $u' = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Ta tính được $u(-2) = m + 2; u\left(-\frac{1}{2}\right) = m - \frac{1}{4}; u(2) = m + 6$.

Nhận xét $m - \frac{1}{4} < m + 2 < m + 6, \forall m \in \mathbb{R}$ nên $A = \max_{[-2; 2]} u = m + 6; a = \min_{[-2; 2]} u = m - \frac{1}{4}$

Nếu $a \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \min_{[-2; 2]} y = \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4} (t/m); m = -\frac{7}{4} (l).$

Nếu $A \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -6 \Rightarrow \min_{[-2; 2]} y = (m + 6)^2 = 4 \Leftrightarrow m = -8 (t/m); m = -4 (l).$

Nếu $Aa < 0 \Leftrightarrow -6 < m < \frac{1}{4} \Rightarrow \min_{[-2; 2]} y = 0 (l).$

Vậy tổng các giá trị thực của tham số là $\frac{9}{4} - 8 = -\frac{23}{4}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{x \in [0; 10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số

$g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0; 2]} g(x) = 8$ là

A. 5.

B. 4.

C. -1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x^3 + x)$ trên $[0; 2]$. Đặt $t = x^3 + x, x \in [0; 2]$.

Ta có $t' = 3x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên $t \in [0; 10]$.

Vì vậy $\max_{x \in [0; 2]} f(x^3 + x) = \max_{t \in [0; 10]} f(t) = 4$ khi $t = 2 \Leftrightarrow x = 1$.



Mặt khác $p(x) = -x^2 + 2x + m = -(x-1)^2 + m + 1 \leq m + 1$. Suy ra $\max_{x \in [0;2]} p(x) = m + 1$ khi $x = 1$.

Vậy $\max_{x \in [0;2]} g(x) = 4 + m + 1 = m + 5 = 8 \Leftrightarrow m = 3$.

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm

Chọn hàm $y = f(x) = 4$ thỏa mãn giả thiết: hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có

$$\max_{x \in [0;10]} f(x) = f(2) = 4.$$

Ta có $g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m = 4 - x^2 + 2x + m$.

$$g'(x) = -2x + 2; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Xét hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có $g(0) = 4 + m$,

$$g(1) = 5 + m, g(2) = 4 + m.$$

Rõ ràng $g(0) = g(2) < g(1)$ nên $\max_{x \in [0;2]} g(x) = g(1)$. Vậy $5 + m = 8 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 19. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. $-\frac{8}{3}$.

B. 5.

C. $\frac{5}{3}$.

D. -1.

Lời giải
N.C.Đ

Chọn A

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2}$ trên $[-1;1]$ có $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-2)^2}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \notin [-1;1] \end{cases}; f(-1) = \frac{3m+1}{-3}; f(0) = -m; f(1) = \frac{m+1}{-1}.$$

Bảng biến thiên

x	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$

Trường hợp 1. $f(0) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$. Khi đó

$$3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = \max\{|f(-1)|; |f(1)|\} \Leftrightarrow 3 = \max\left\{\frac{3m+1}{3}; m+1\right\} \Leftrightarrow m+1 = 3 \Leftrightarrow m = 2.$$

Trường hợp 2. $f(0) > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

$$\text{Khả năng 1. } \begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1. \text{ Khi đó } 3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = f(0) \Leftrightarrow m = -3.$$



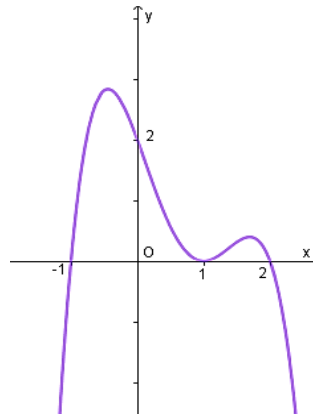
Khả năng 2. $-1 < m \leq -\frac{1}{3}$. Khi đó $\begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) < 0 \end{cases}$. $3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = \max\{f(0); |f(1)|\}$

$\Leftrightarrow 3 = \max\{-m; m+1\}$: Trường hợp này vô nghiệm.

Khả năng 3. $-\frac{1}{3} < m < 0$. Khi đó $3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = \max\{f(0); |f(1)|; |f(-1)|\}$: Vô nghiệm.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn là $m_1 = -3, m_2 = 2$. Do đó tổng tất cả các phần tử của S là -1 .

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + x - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. $f(-1) - \frac{5}{3}$.

B. $f(1) - \frac{1}{3}$.

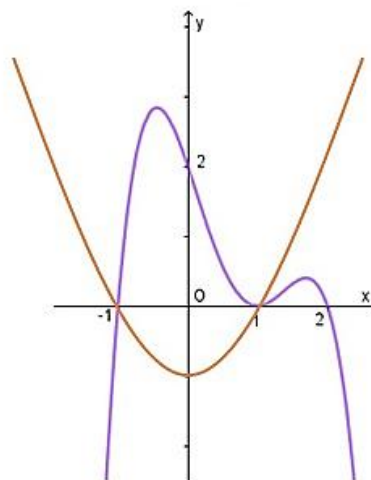
C. $f(2) - \frac{5}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = f'(x) - x^2 + 1 = f'(x) - (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 1 (*)$



Từ đồ thị ta cáo bảng xét dấu



x	-1	1	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		$g(1)$	

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + x - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng $f(1) - \frac{1}{3}$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x \cdot f(x) - x^2 f'(x) = 2f^2(x)$, với $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M + m$.

A. $\frac{9}{10}$.

B. $\frac{21}{10}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3x \cdot f(x) - x^2 f'(x) = 2f^2(x) \Rightarrow 3x^2 f(x) - x^3 f'(x) = 2x f^2(x)$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 f(x) - x^3 f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Rightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)} \right)' = 2x \Rightarrow \frac{x^3}{f(x)} = x^2 + C.$$

Thay $x=1$ vào ta được $\frac{1}{f(1)} = 1 + C$, vì $f(1) = \frac{1}{3}$ nên suy ra $C = 2$.

Nên $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$. Ta có $f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2}{(x^2 + 2)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

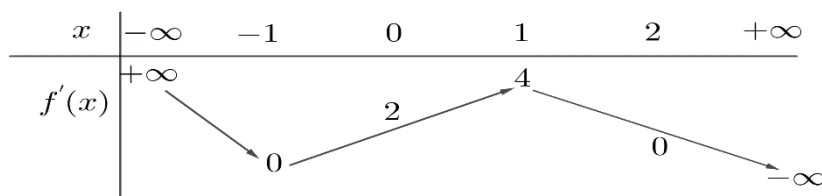
x	1	2
y'		+
y	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$

Khi đó, $f(x)$ đồng biến trên $[1; 2]$.

Suy ra $m = f(1) = \frac{1}{3}$; $M = f(2) = \frac{4}{3}$.

Suy ra $M + m = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng $f(-1) = \frac{10}{3}$, $f(2) = 6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. $\frac{10}{3}$.

B. $\frac{820}{27}$.

C. $\frac{730}{27}$.

D. 198.

Lời giải

Tác giả: Trần Phương; Fb: Trần Phương

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$

$$g'(x) = 3[f^2(x) - 1] \cdot f'(x), \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f^2(x) = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên, ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-1; 2] \\ x = 2 \in [-1; 2] \end{cases}$

N.C.Đ

Và $f'(x) \geq 0, \forall x \in [-1; 2]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[-1; 2] \Rightarrow f(x) \geq f(-1) = \frac{10}{3}$

$\Rightarrow f(x) > 1 \Rightarrow f^2(x) > 1, \forall x \in [-1; 2]$ nên (2) vô nghiệm.

Do đó, $g'(x) = 0$ chỉ có 2 nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

$$\text{Ta có } g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{730}{27}.$$

$$g(2) = f^3(2) - 3f(2) = 6^3 - 3(6) = 198.$$

$$\text{Vậy } \min_{[-1; 2]} g(x) = g(-1) = \frac{730}{27}.$$

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(1)$.

B. $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(-3)$.

C. $\min_{[-3; 1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

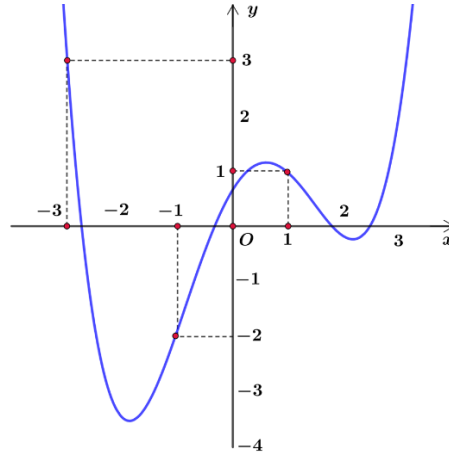
D. $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(-1)$.

Lời giải

Chọn D

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Xét hàm

$$\text{số } g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$



Cho $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Dựa vào đồ thị ta so sánh được $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x) - x] f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Giá trị của $3M - m$ bằng

A. 4.

B. -28.

C. -3.

D. 33.

Lời giải
N.C.Đ

Chọn A

Ta có: $[f(x) - x] f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2 \Leftrightarrow f^2(x) - xf(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2$
 $\Leftrightarrow 4f^2(x) - 4xf(x) = 4x^6 + 12x^4 + 8x^2 \Leftrightarrow 4f^2(x) - 4xf(x) + x^2 = 4x^6 + 12x^4 + 9x^2$
 $\Leftrightarrow [2f(x) - x]^2 = (2x^3 + 3x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x) - x = 2x^3 + 3x \\ 2f(x) - x = -2x^3 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^3 + 2x \\ f(x) = -x^3 - x \end{cases}$

Với $f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $f(x) = -x^3 - x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x) = -x^3 - x$. Vì $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $M = \max_{[1;2]} f(x) = f(1) = -2$

và $m = \min_{[1;2]} f(x) = f(2) = -10$.

Từ đây, ta suy ra: $3M - m = 3(-2) + 10 = 4 \Rightarrow$ chọn đáp án A

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2019	-2018	$+\infty$	

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x) - \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x - \frac{2}{15}$ trên đoạn $[-1; 2]$?

A. 2022.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2021.

Lời giải

**Chọn D**

$$g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x) - x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 - 1)[3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Mà $x \in [-1; 2] \Rightarrow x^3 - 3x \in [-2; 2] \Rightarrow f'(x^3 - 3x) < 0 \Rightarrow 3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3 < 0$, do đó

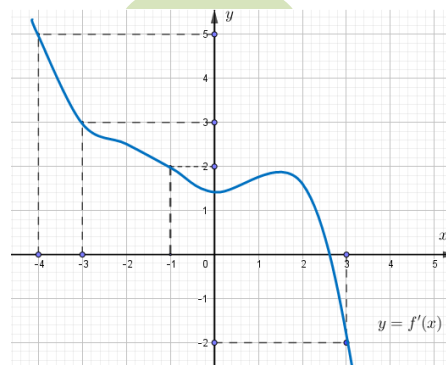
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Ta có

x		-1		1		2
g'		0	+	0	-	
g		$g(-1)$		$g(1)$		$g(2)$

Vậy $\max_{[-1;2]} y = g(1) = f(-2) + 2 = 2021$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



A. $x_0 = -4$.

B. $x_0 = -1$.

C. $x_0 = 3$.

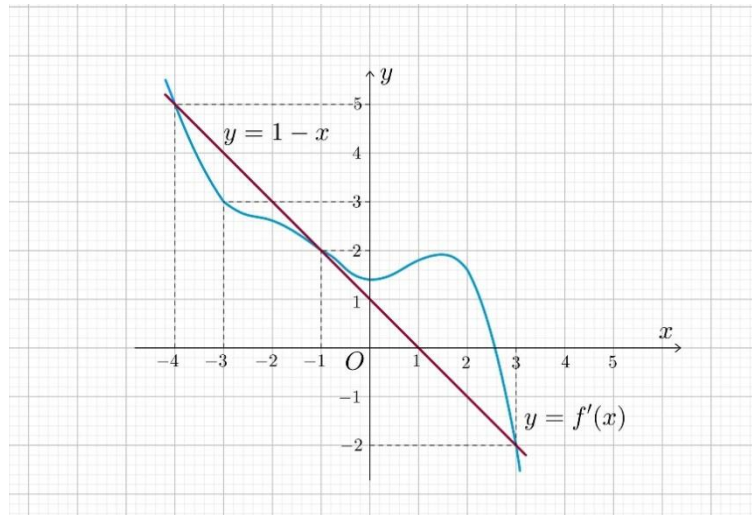
D. $x_0 = -3$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x) = 2[f'(x) - (1-x)]$$

Vẽ đường thẳng $y = 1 - x$ trên cùng hệ trục chứa đồ thị $y = f'(x)$.



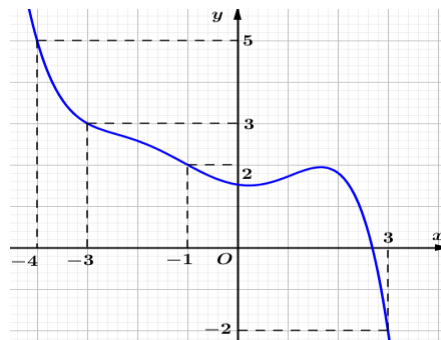
Dựa vào hình vẽ ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	-4	-1	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$g(-4)$	$g(-1)$	$g(3)$

Vậy hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = -1$

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm.



A. $x_0 = -1$.

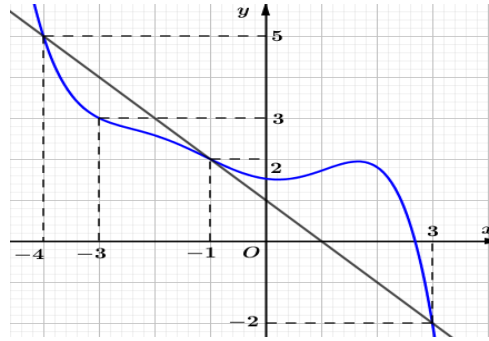
B. $x_0 = 3$.

C. $x_0 = -4$.

D. $x_0 = -3$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x) = 2[f'(x) - (1-x)]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	-4		-1		3	
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0
$g(x)$	$g(-4)$		$g(-1)$		$g(3)$	

Từ bảng biến thiên, suy ra $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-4; 3]$ tại $x_0 = -1$

Ta có: $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x) = 2[f'(x) - (1-x)]$

Vì trong đoạn $[-4; -1]$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y = 1-x$

$\Rightarrow f'(x) < 1-x \forall x \in [-4; -1] \Rightarrow g'(x) < 0 \forall x \in [-4; -1] \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $(-4; -1)$

$\Rightarrow g(-4) > g(-3) > g(-1)$ (*)

Vì trong đoạn $[-1; 3]$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = 1-x$

$\Rightarrow f'(x) > 1-x \forall x \in [-1; 3] \Rightarrow g'(x) > 0 \forall x \in [-1; 3] \Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(-1; 3)$

$\Rightarrow g(3) > g(-1)$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-4; 3]$ tại $x_0 = -1$

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$?

A. Vô số.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	1	2	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$m-2$	$m-4$	m



Ta thấy $\max_{[1;3]} f(x) = f(3) = m$ và $\min_{[1;3]} f(x) = f(2) = m - 4$.

Ta có $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| = \max\{|m|; |m - 4|\}$.

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} |m| \leq |m - 4| \\ \max\{|m|; |m - 4|\} = |m - 4| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \leq m^2 - 8m + 16 \\ -4 \leq m - 4 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ 0 \leq m \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2,$$

mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} |m| > |m - 4| \\ \max\{|m|; |m - 4|\} = |m| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > m^2 - 8m + 16 \\ -4 \leq m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -4 \leq m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 4,$$

mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4\}$.

Vậy, có 5 giá trị nguyên của tham số m .

Vậy chọn đáp án D.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{[-1;2]} f(x) = 3$. Xét $g(x) = f(3x - 1) + m$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

A. 13.

B. -7.

C. -13.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\max_{[0;1]} g(x) = \max_{[0;1]} [f(3x - 1) + m] = m + \max_{[0;1]} f(3x - 1)$.

Đặt $t = 3x - 1$. Ta có hàm số $t(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $x \in [0;1] \Rightarrow t \in [-1;2]$.

Suy ra: $\max_{[0;1]} f(3x - 1) = \max_{[-1;2]} f(t) = 3$. Suy ra $\max_{[0;1]} g(x) = m + 3$.

Do đó $\max_{[0;1]} g(x) = -10 \Leftrightarrow m + 3 = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; -2017)$.

B. $(2017; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(-2017; 0)$.

Lời giải.

Chọn A

Dựa vào bảng xét dấu của $f''(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$



x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'''(x)$	+	0	-	0
$f'(x)$		3	-2018	

Đặt $t = x + 2017$.

Ta có $y = f(x + 2017) + 2018x = f(t) + 2018t - 2017 \cdot 2018 = g(t)$.

$$g'(t) = f'(t) + 2018.$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ suy ra phương trình $g'(t)$ có một nghiệm đơn $\alpha \in (-\infty; 0)$ và một nghiệm kép $t = 2$.

Ta có bảng biến thiên $g(t)$

Hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t_0 = \alpha \in (-\infty; 0)$.

Suy ra hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 mà

$$x_0 + 2017 \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow x_0 \in (-\infty; -2017).$$

Câu 31. Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + m + 3| - 4x$ bằng -5 .

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Xét $f(x) = x^2 - 4x + m + 3$ có $\Delta' = 1 - m$.

TH1. $m \geq 1$: $f(x) \geq 0 \forall x \Leftrightarrow y = x^2 - 8x + m + 3$.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
y	$+\infty$	$m - 13$	$+\infty$

$$\min y = -5 \Leftrightarrow m = 8 \text{ (TM)}.$$

TH2. $m < 1$: $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 2 - \sqrt{1 - m}$; $x_2 = 2 + \sqrt{1 - m}$.

□ Nếu $x \in (x_1; x_2)$: $y = -x^2 - 3 - m$.

$$y(x_1) = -8 + 4\sqrt{1 - m}.$$

$$y(x_2) = -8 - 4\sqrt{1 - m}.$$

$$\Rightarrow y(x_1) < y(x_2)$$

$$\Rightarrow \min_{(x_1; x_2)} y = -8 - 4\sqrt{1 - m} < -8 \text{ (Không TM)}.$$

□ Nếu $x \notin (x_1; x_2)$: $y = x^2 - 8x + 3 + m$.

$$+) x_2 < 4 \Leftrightarrow 1 > m > -3:$$



x	$-\infty$	x_1	x_2	4	$+\infty$
y	$+\infty$	(shaded region)			$+\infty$
				$m-13$	

$\min y = m - 13 = -5 \Leftrightarrow m = 8$ (Loại).

+) $x_2 \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -3$:

x	$-\infty$	x_1	4	x_2	$+\infty$
y	$+\infty$	(shaded region)			$+\infty$
		$-8 + 4\sqrt{1-m}$		$-8 - 4\sqrt{1-m}$	

$\Rightarrow \min y = -8 - 4\sqrt{1-m} < -8$ (Không TM). Vậy có 1 giá trị của m .

N.C.Đ



CHỦ ĐỀ: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 2

TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Câu 1. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\frac{9x^3 + x}{y+1} = \sqrt{3y+2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$S = 6x - y$ là:

A. $\frac{89}{12}$.

B. $\frac{11}{3}$.

C. $\frac{17}{12}$.

D. $\frac{82}{3}$.

Câu 2. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x + y \neq -1$ và $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{x+y+1}$. Tính $M + m$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 3. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$. Giá trị của $A = M + 15m$ là:

A. $17 - 2\sqrt{6}$.

B. $17 + \sqrt{6}$.

C. $17 + 2\sqrt{6}$.

D. $17 - \sqrt{6}$.

Câu 4. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left| \sqrt{x^2 + y^2} - a \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ của tham số a để $M \geq 2m$?

A. 17.

B. 15.

C. 18.

D. 16.

Câu 5. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3y^2 + 4xy + 7x + 4y - 1}{x + 2y + 1}$.

A. 3.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\frac{114}{11}$.

D. $2\sqrt{3}$.

Câu 6. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$ thuộc khoảng nào?

A. $(-6; -5)$.

B. $(-10; -9)$.

C. $(-11; -9)$.

D. $(-5; -4)$.

Câu 7. Cho các số thực x, y thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $3x^2 - 2xy - y^2 = 5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + 2y^2$ thuộc khoảng nào sau đây.

A. $(4; 7)$.

B. $(-2; 1)$.

C. $(1; 4)$.

D. $(7; 10)$.



Câu 8. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Thỏa mãn $|z - 2 + i| = |z + 2 + 5i|$ và biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất: $H = \frac{x^2 + y^2 - 3y + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}}$. Giá trị của $2x + y$ bằng:

A. -6

B. $-6 + \sqrt{5}$ C. $-3 - \sqrt{5}$ D. $-6 - \sqrt{5}$

Câu 9. Cho x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-9) + y(y-9) + xy$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{3x+2y-9}{x+y+10}$ khi x, y thay đổi.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

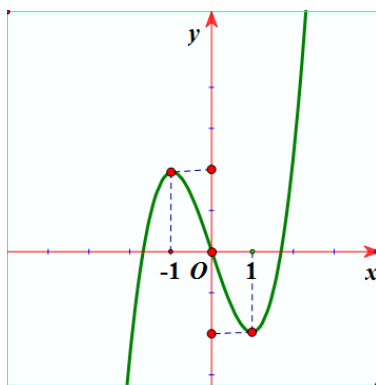
D. 0.

Câu 10. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$.

Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $Q = f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M + m$ bằng

A. $-4 - 3\sqrt{2}$.B. $-4 - 5\sqrt{2}$.C. $-4 - 4\sqrt{2}$.D. $-4 - 2\sqrt{2}$.

Câu 12. Cho 2 số x, y thỏa mãn $x^2 + 5y^2 = 1 + 4xy$ và hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = f\left(\frac{2x-3y-3}{-x+4y+4}\right)$.



Tích $M.m$ bằng

A. $\frac{-1436}{1331}$ B. $\frac{3380}{1331}$ C. $\frac{1436}{1331}$ D. $\frac{1944}{1331}$

Câu 13. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + 5y^2 + 2xy = 1$ và hàm số $f(t) = t^4 - 2t^2 + 2$

Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q = f\left(\frac{x+y-1}{x+3y-2}\right)$. Tổng $M + m$

A. $4\sqrt{3} + 2$.B. $8\sqrt{3} - 2$.

C. 66.

D. $9\sqrt{3} + 17$

Câu 14. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} xy + yz + zx = 8 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$ và hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Tổng $M + m$

A. 3.

B. $\frac{28}{9}$.C. $\frac{19}{9}$.

D. 2



Câu 15. Cho các số thực dương x, y, z thay đổi và thỏa mãn: $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3}$ bằng

- A. 18. B. 12. C. 16. D. 24.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 1$ và các số thực m, n thỏa mãn $m^2 - 4mn + 5n^2 = 2\sqrt{2}n - 1$.

Giá trị nhỏ nhất của $f\left(\frac{m - 2\sqrt{2}}{n}\right)$ bằng

- A. -99. B. -100. C. 5. D. 4.

Câu 17. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = \frac{3}{2}$ và biểu thức $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính $x^2 + y^2$.

- A. $\frac{25}{16}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{2313}{1156}$. D. $\frac{153}{100}$.

Câu 18. Cho $0 \leq x, y \leq 1$ thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2018}{y^2 - 2y + 2019}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$. Khi đó $M + m$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{383}{16}$. B. $\frac{136}{3}$. C. $\frac{25}{2}$. D. $\frac{391}{16}$.

Câu 19. Biết đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tiếp xúc với parabol $y = ax^2 + b$ tại điểm có hoành độ $x \in (0; 2)$. Giá trị lớn nhất của $S = a + b$ là.

- A. $S_{\max} = -1$. B. $S_{\max} = 0$. C. $S_{\max} = 1$. D. $S_{\max} = -3$.

Câu 20. Hàm số $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \dots + (x-2019)^2$ ($x \in \mathbb{R}$) đạt giá trị nhỏ nhất khi x bằng

- A. 2020. B. 1010. C. 2019. D. 0.

Câu 21. Hàm số $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + b$ là

- A. 2. B. 0. C. -2. D. -1.

Câu 22. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b = 4$. Tính $P = a + 2b + 3c$ khi biểu thức $|2a + b - 2c + 7|$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $P = 7$. B. $P = 3$. C. $P = -3$. D. $P = -7$.

Câu 23. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 4b - 6c = 10$ và $a + c = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = 3a + 2b + c$ khi $Q = a^2 + b^2 + c^2 - 14a - 8b + 18c$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. 10. B. -10. C. 12. D. -12.

Câu 24. Cho phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm. Giá trị nhỏ nhất $P = a^2 + b^2 + c^2$ bằng

- A. 2. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{8}{3}$. D. 4.



Câu 25. Biết hai hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x - 2$ và $g(x) = -x^3 + bx^2 - 2x + 3$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a| + |b|$.

A. $3\sqrt{2}$.B. $6\sqrt{2}$.

C. 6.

D. 3.

BỔ SUNG BÀI TẬP TỰ LUẬN HÀM NHIỀU BIẾN

Bài 1. Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1;3]$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$

Bài 2: Cho $x, y, z \in [1;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{2(xy + yz + zx)}{xyz + 2(2x + y + z)} + \frac{8}{2x(y + z) + yz + 4} - \frac{y + z + 4}{\sqrt{yz} + 1}$$

Bài 3: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a \leq 1, b \leq 2, c \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B = \frac{2(2ab + ac + bc)}{1 + 2a + b + 3c} + \frac{8 - b}{b + c + b(a + c) + 8} + \frac{b}{\sqrt{12a^2 + 3b^2 + 27c^2} + 8}$$

Bài 4: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $y + z = x(y^2 + z^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

Bài 5: Cho $a > b > c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right]$$

Bài 6: Cho $x, y, z > 0; xyz(x + y + z) = 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (x + y)(x + z) + y^2z^2$

Bài 7: Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left| \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right|$

Bài 8: Cho $a, b, c > 0, a^2 + 2b^2 \leq a^2b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{c}{b} + \frac{c}{a} - (c-1)^2$

Bài 9: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a, c \geq 1; b \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a(b+c)}{b+2c} + \frac{c(a+b)}{b+2a} + \frac{3(a+c)^2 + 2b^2 + 8}{4(3+ac)}$$

Bài 10: Cho các số thực $x, y, z \in [0;1]$ và $z = \min\{x, y, z\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}} + \frac{yz+1}{\sqrt{y(y+z)}} + \frac{2}{xy+xz-yz}$$

Bài 11: Cho các số $a, b, c \in [0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} + abc$$

➤ Có nhiều bài toán tìm cực trị của biểu thức ta chỉ cần sử dụng các biến đổi cơ bản đã làm giảm được số biến. Tuy nhiên bài toán cực trị có dạng phân thức ta phải sử dụng các bất đẳng thức để đánh giá mới làm giảm được số biến của bài toán.

➤ Các bất đẳng thức thường dùng

1. Cho $a, b \in \mathbb{R}$ ta có $(a+b)^2 \geq 4ab$

2. Cho $a, b > 0$ ta có $a^3 + b^3 \geq \frac{(a+b)^3}{4} \geq a^2b + ab^2$



3. Cho $a, b > 0$ ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

4. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab + bc + ca$

5. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ ta có $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$

6. Cho $a, b, c > 0$ ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

7. Cho $a, b > 0$ và $ab \geq 1$ ta có $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$

8. Cho $a, b > 0$ và $ab \leq 1$ ta có $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$

Nhận xét: Trên đây chỉ là một số BDT tiêu biểu thường sử dụng để tìm cực trị bằng cách đơn biến, ngoài ra ta có thể sử dụng các hệ quả khác hoặc các bất đẳng thức khác. Ứng dụng các BDT trên để giải các bài toán sau đây.

Bài 12: Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{c^2 + 4(ab + bc + ca)}$

Bài 13: Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $c > 0$ và $a^3 + b^3 = c(c-1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2}$

Bài 14: Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x + y + z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x+y+z)^3}$

N.C.Đ

Bài 15: Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2 - 2(x^2 + y^2) - z^2}$

Bài 16: Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Bài 17: Cho các số thực dương x, y, z thay đổi thỏa mãn điều kiện $x + 2y - z \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{10y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{x+2y}{2x+3y}$

Bài 18: Cho các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a \geq b, a \geq c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{5(a+b+c)} + \frac{b}{5a-2c} + \frac{c}{5a-2b}$

Bài 19: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $0 < x < y < z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^3 z}{y^2(xz + y^2)} + \frac{y^4}{z^2(xz + y^2)} + \frac{z^3 + 15x^3}{x^2 z}$

Bài 20: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} = \sqrt{\frac{ab}{c}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c^2}{a^2 + b^2}$

Bài 21: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a \geq b \geq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



$$T = \frac{(a^2 + c^2)\sqrt{ab + bc + ca}}{abc(a + b + c)}$$

Bài 22: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức: $P = \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} - \frac{x^3y^3 + y^3z^3}{24x^3z^3}$

Bài 23: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + 2$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{2y^2}{x^2 + y^2} + \frac{2z^2}{y^2 + z^2} - \frac{3z}{2x + z}$

N.C.Đ



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\frac{9x^3 + x}{y+1} = \sqrt{3y+2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$S = 6x - y$ là:

A. $\frac{89}{12}$.

B. $\frac{11}{3}$.

C. $\frac{17}{12}$.

D. $\frac{82}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết $y > 0$ nên ta có :

$$\frac{9x^3 + x}{y+1} = \sqrt{3y+2} \Leftrightarrow 9x^3 + x = \sqrt{3y+2}(y+1) \Leftrightarrow [(3x)^3 + 3x] = [\sqrt{(3y+2)^3} + \sqrt{3y+2}]$$

$$\Leftrightarrow f(3x) = f(\sqrt{3y+2}) \text{ với } f(t) = t^3 + t.$$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra $3x = \sqrt{3y+2}$

$$\text{hay } y = 3x^2 - \frac{2}{3}. \text{ Do } y > 0 \text{ và } 3x = \sqrt{3y+2} \text{ nên } x > \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Khi đó } S = 6x - y = 6x - 3x^2 + \frac{2}{3} = -3x^2 + 6x + \frac{2}{3} = -3(x-1)^2 + \frac{11}{3} \leq \frac{11}{3}.$$

$$\text{Do đó } \max S = \frac{11}{3} \text{ khi } x = 1.$$

N.C.Đ

Câu 2. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x + y \neq -1$ và $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{x+y+1}$. Tính $M + m$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Với điều kiện $x + y \neq -1; x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$ ta có $P = \frac{xy}{x^2 + y^2 + xy}$.

$$\text{Nếu } y = 0 \text{ thì } \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \text{ Khi đó } P = 0.$$

$$\text{Nếu } y \neq 0 \text{ thì } P = \frac{\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1}. \text{ Đặt } t = \frac{x}{y}. \text{ Ta có } P = \frac{t}{t^2 + t + 1}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{t}{t^2 + t + 1}, t \in \mathbb{R}. f'(t) = \frac{-t^2 + 1}{(t^2 + t + 1)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$$



t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên:

$$M = \frac{1}{3} \text{ tại } \begin{cases} \frac{x}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$m = -1 \text{ tại } \begin{cases} \frac{x}{y} = -1 \\ x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy $M + m = -\frac{2}{3}$.

Cách 2:

Với điều kiện $x + y \neq -1; x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$ ta có $P = \frac{xy}{x^2 + y^2 + xy}$.

$$\Rightarrow Px^2 + xy(P-1) + Py^2 = 0 \quad (*)$$

+) Nếu $P = 0$ thì $x = 0$ hoặc $y = 0$.

+) Nếu $P \neq 0$ thì $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

Để phương trình (*) có nghiệm x thì $\Delta_x = -y^2(P+1)(3P-1) \geq 0 \Rightarrow -1 \leq P \leq \frac{1}{3}$.

Ta có:

$$M = \frac{1}{3} \text{ tại } \begin{cases} x = \frac{-y(P-1)}{2P} = y \\ x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$m = -1 \text{ tại } \begin{cases} x = \frac{-y(P-1)}{2P} = -y \\ x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Do đó $M = \frac{1}{3}; m = -1$. Vậy $M + m = -\frac{2}{3}$.

Câu 3. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất,

giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$. Giá trị của $A = M + 15m$ là:

A. $17 - 2\sqrt{6}$.

B. $17 + \sqrt{6}$

C. $17 + 2\sqrt{6}$

D. $17 - \sqrt{6}$.



Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } x^2 - xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 1 + 3xy \leq 1 + \frac{3}{4}(x+y)^2 \Rightarrow -2 \leq x+y \leq 2$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{2}{3} \leq x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \frac{1}{3}[(x+y)^2 - 2] \leq 2$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + y^2 \left(\frac{2}{3} \leq t \leq 2 \right). \text{ Vậy } P = \frac{-t^2 + 4t - 1}{t+1} = g(t)$$

$$\text{Xét hàm số } g(t) = \frac{-t^2 + 4t - 1}{t+1} \left(t \in \left[\frac{2}{3}; 2 \right] \right)$$

$$g'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 5}{t+1} \left(t \in \left[\frac{2}{3}; 2 \right] \right); g'(t) = 0 \Rightarrow t = -1 + \sqrt{6} \in \left[\frac{2}{3}; 2 \right].$$

$$\text{Vậy } \min_{t \in \left[\frac{2}{3}; 2 \right]} g(t) = \frac{11}{15}; \max_{t \in \left[\frac{2}{3}; 2 \right]} g(t) = 6 - 2\sqrt{6}$$

$$\text{Vậy } A = M + 15m = 17 - 2\sqrt{6}$$

Nhận xét: đây là bài toán thường gặp trong các đề thi TSDH những năm trước đây. Tư tưởng của các bài toán này là sử dụng ứng dụng đạo hàm tìm GTNN, GTLN của hàm số sau khi áp dụng phương pháp dồn biến.

Câu 4.

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left| \sqrt{x^2 + y^2} - a \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ của tham số a để $M \geq 2m$?

A. 17.

B. 15.

C. 18.

D. 16.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 10 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = 6 + 4x - x^2 + \sqrt{6 + 4x - x^2}. (*)$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = t^2 + t, \text{ có } f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t > 0.$$

$$\text{Ta có hàm } y = f(t) \text{ đồng biến trên } [0; +\infty), \sqrt{y^2 + 6y + 10} \in [0; +\infty), \sqrt{6 + 4x - x^2} \in [0; +\infty).$$

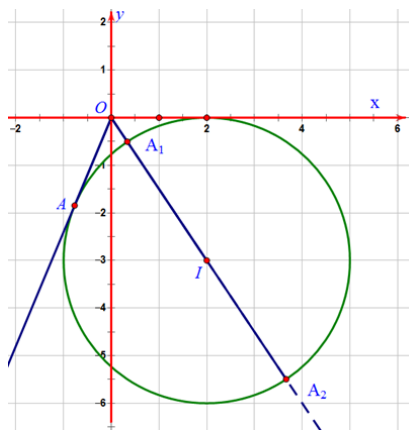
$$\text{Nên } (*) \Leftrightarrow f(\sqrt{y^2 + 6y + 10}) = f(\sqrt{6 + 4x - x^2}) \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 10 = 6 + 4x - x^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9.$$

$$\text{Xét điểm } A(x; y) \text{ thuộc đường tròn } (C) \text{ có phương trình } (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9.$$

$$\text{Ta có } OA = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -3)$, bán kính $R = 3$ nên điểm $O(0; 0)$ nằm ngoài (C) .



Gọi A_1, A_2 là giao điểm của đường thẳng OI với đường tròn (C) .

$$\forall A(x; y) \in (C): OA_1 \leq OA \leq OA_2, \text{ với } OA_1 = OI - R = \sqrt{13} - 3 \text{ và } OA_2 = OI + R = \sqrt{13} + 3.$$

$$\text{Tức là ta có } \sqrt{13} - 3 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{13} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{13} - 3 - a \leq \sqrt{x^2 + y^2} - a \leq \sqrt{13} + 3 - a.$$

$$\text{Th1: } \sqrt{13} - 3 - a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \sqrt{13} - 3, (1)$$

$$\text{Khi đó } M = \sqrt{13} + 3 - a \text{ và } m = \sqrt{13} - 3 - a.$$

$$M \geq 2m \Leftrightarrow \sqrt{13} + 3 - a \geq 2(\sqrt{13} - 3 - a) \Leftrightarrow a \geq \sqrt{13} - 9.$$

Kết hợp với điều kiện (1) và a nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ ta có

$$a \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0\}.$$

$$\text{Th2: } \sqrt{13} + 3 - a \leq 0 \Leftrightarrow a \geq \sqrt{13} + 3, (**)$$

N.C.Đ

$$\text{Khi đó } M = a - \sqrt{13} + 3 \text{ và } m = a - \sqrt{13} - 3.$$

$$M \geq 2m \Leftrightarrow a - \sqrt{13} + 3 \geq 2(a - \sqrt{13} - 3) \Leftrightarrow a \leq \sqrt{13} + 9.$$

Kết hợp với điều kiện (**) và a nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ ta có $a \in \{7; 8; 9; 10\}$.

$$\text{Th3: } \begin{cases} \sqrt{13} - 3 - a < 0 \\ \sqrt{13} + 3 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{13} - 3 < a < \sqrt{13} + 3, (***)$$

Khi đó $M > 0$ và $m = 0$ nên ta luôn có $M \geq 2m$

Kết hợp điều kiện (***) và a nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ ta có $a \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Vậy $a \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Câu 5. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3y^2 + 4xy + 7x + 4y - 1}{x + 2y + 1}$.

A. 3.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\frac{114}{11}$.

D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0.$$



$$P = \frac{(3y^2 + 4xy + 7x + 4y - 1) + (x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5)}{x + 2y + 1}$$

$$= \frac{4y^2 + 4xy + x^2 + x + 2y + 4}{x + 2y + 1} = \frac{(2y + x)^2 + (x + 2y) + 4}{x + 2y + 1}.$$

Đặt $t = x + 2y$.

$$(1^2 + 2^2)[(x - 3)^2 + (y - 1)^2] \geq [(x - 3) + (2y - 2)]^2 \Rightarrow (x + 2y - 5)^2 \leq 25 \Leftrightarrow 0 \leq x + 2y \leq 10.$$

$$P = \frac{t^2 + t + 4}{t + 1} = t + \frac{4}{t + 1}, 0 \leq t \leq 10.$$

Sử dụng MTCT $\Rightarrow \min P = 3$ khi $t = 1$.

Câu 6. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$ thuộc khoảng nào?

A. $(-6; -5)$.

B. $(-10; -9)$.

C. $(-11; -9)$.

D. $(-5; -4)$.

Lời giải

Chọn A

Vì a, b dương nên từ giả thiết $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$, ta chia hai vế cho ab

$$2\left(a^2 + b^2\right) + ab = (a + b)(ab + 2) \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 = (a + b) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si cho hai số dương $(a + b)$ và $2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$:

$$(a + b) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{(a + b) \cdot 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $(a + b) = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

Suy ra $2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 \geq 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)}$. Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}, (t > 0)$.

Khi đó: $2t + 1 \geq 2\sqrt{2(t + 2)} \Leftrightarrow 4t^2 - 4t - 15 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{5}{2} \\ t \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$. Do đó, ta có điều kiện $t \geq \frac{5}{2}$.

$$\text{Mặt khác: } P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) = 4\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\right] - 9\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2\right]$$

$$= 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18.$$

Đặt $f(t) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18 \Rightarrow f'(t) = 12t^2 - 18t - 12 > 0, \forall t \geq \frac{5}{2}$.

Bảng biến thiên



t	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	$-\frac{23}{4}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có, $\min_{t \in \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $-\frac{23}{4}$ khi $\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{5}{2} \\ (a+b) = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ a=1 \\ b=2 \end{cases}$.

Câu 7. Cho các số thực x, y thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $3x^2 - 2xy - y^2 = 5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + 2y^2$ thuộc khoảng nào sau đây.

A. (4; 7).

B. (-2; 1).

C. (1; 4).

D. (7; 10).

Lời giải

Chọn C

Xét $y = 0 \Rightarrow P = \frac{5}{3}$ loại phương án A và **N.C.Đ** D.

Xét $y \neq 0 \Rightarrow P = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7y^2}{4} > 0$ khi đó ta có biểu thức $\frac{5}{P} = \frac{3x^2 - 2xy - y^2}{x^2 + xy + 2y^2}$

Chia cả tử và mẫu của vế phải cho y^2 ta được $\frac{5}{P} = \frac{3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} - 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 2}$.

Đặt $\frac{x}{y} = t (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \frac{5}{P} = \frac{3t^2 - 2t - 1}{t^2 + t + 2} = f(t) \Rightarrow f'(t) = \frac{5t^2 + 14t - 3}{(t^2 + t + 2)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = \frac{1}{5} \end{cases}$

Bảng Biến thiên hàm số $f(t)$.

t	$-\infty$	-3	$\frac{1}{5}$	$+\infty$	
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	3	4	$-\frac{4}{7}$	3	

Từ bảng biến thiên ta có $f(t) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{5}{P} \leq 4 \Leftrightarrow P \geq \frac{5}{4}$.



Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{5}{4}$, dấu bằng xảy ra khi $t = -3 \Leftrightarrow x = -3y$.

Câu 8. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Thỏa mãn $|z - 2 + i| = |z + 2 + 5i|$ và biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất: $H = \frac{x^2 + y^2 - 3y + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}}$. Giá trị của $2x + y$ bằng:

A. -6

B. $-6 + \sqrt{5}$

C. $-3 - \sqrt{5}$

D. $-6 - \sqrt{5}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|z - 2 + i| = |z + 2 + 5i| \Leftrightarrow x + y + 3 = 0$ (1). Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thì M thuộc đường thẳng d có phương trình (1).

$$\begin{aligned} \text{Mà } H &= \frac{x^2 + y^2 - 3y + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}} \\ &= \frac{(x+1)(x-1) + (y-1)(y-2)}{\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} \quad (2) \end{aligned}$$

Đặt $A(-1;1)$, $B(1;2)$, $M(x;y)$ thì

$$\overrightarrow{AM} = (x+1; y-1), \overrightarrow{MB} = (x-1; y-2) \Rightarrow \overset{\text{N.C.Đ}}{\cos \angle AMB} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB}}{AM \cdot BM} = H$$

Mà A, B cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d , M thuộc d nên $\cos \angle AMB$ nhỏ nhất khi góc $\angle AMB$ lớn nhất.

Gọi (C) là đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng d tại C.

Phương trình đường thẳng AB là: $x - 2y + 3 = 0$.

Gọi E là giao điểm của AB và d thì $E(-3;0)$

Vậy C thỏa mãn: $EC^2 = EA \cdot EB = 10$

$$\Rightarrow C(-3 + \sqrt{5}; -\sqrt{5}), C(-3 - \sqrt{5}; \sqrt{5})$$

$$\text{Chọn C để góc } \angle CEA \text{ nhọn ta được } C(-3 + \sqrt{5}; -\sqrt{5}) \Rightarrow \begin{cases} a = -3 + \sqrt{5} \\ b = -\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow 2a + b = -6 + \sqrt{5}$$

Câu 9. Cho x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{x+y}{x^2 + y^2 + xy + 2} = x(x-9) + y(y-9) + xy$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{3x+2y-9}{x+y+10}$ khi x, y thay đổi.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $\frac{x+y}{x^2 + y^2 + xy + 2} > 0 \Leftrightarrow (x+y) > 0$.

Vì $x^2 + y^2 + xy + 2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2 > 0$ với $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $\log_3 \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-9) + y(y-9) + xy$.

$$\Leftrightarrow \log_3(x+y) - \log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy-9(x+y).$$

$$\Leftrightarrow 2 + \log_3(x+y) + 9(x+y) = \log_3(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2.$$

$$\Leftrightarrow \log_3 9(x+y) + 9(x+y) = \log_3(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2 \quad (1).$$

Đặt $f(t) = \log_3 t + t \quad (\forall t > 0)$.

Có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$ với $(\forall t > 0) \Rightarrow f$ là hàm đồng biến với $(\forall t > 0)$. Khi đó:

$$f(9(x+y)) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow 9(x+y) = x^2+y^2+xy+2.$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2-9x-9y=0.$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4xy+8-36x-36y=0.$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)^2 - 18(2x+y) + 3(y-3)^2 - 19 = 0.$$

$$\text{Mà } \Leftrightarrow 3(y-3)^2 \geq 0 \Rightarrow (2x+y)^2 - 18(2x+y) - 19 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq 2x+y \leq 19.$$

$$\text{Mặt khác } P-1 = \frac{2x+y-19}{x+y+10} \leq 0 \Rightarrow P \leq 1 \text{ Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} 2x+y=19 \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=3 \end{cases}.$$

Câu 10. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$.

Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $Q = f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M+m$ bằng

A. $-4-3\sqrt{2}$.

B. $-4-5\sqrt{2}$.

C. $-4-4\sqrt{2}$.

D. $-4-2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x^2 + y^2 - xy = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 1$. Ta đặt: $t = \frac{5x-y+2}{x+y+4}$

$$\Rightarrow t(x+y+4) = 5x-y+2 \Leftrightarrow (t-5)x + (t+1)y + 4t - 2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (t-5)\left(x - \frac{y}{2}\right) + (\sqrt{3}t - \sqrt{3})\frac{\sqrt{3}y}{2} = 2 - 4t.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$(2-4t)^2 = \left[(t-5)\left(x - \frac{y}{2}\right) + (\sqrt{3}t - \sqrt{3})\frac{\sqrt{3}y}{2}\right]^2 \leq \left[(t-5)^2 + (\sqrt{3}t - \sqrt{3})^2\right] \left[\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right]$$

$$\Rightarrow (2-4t)^2 \leq \left[(t-5)^2 + (\sqrt{3}t - \sqrt{3})^2\right] \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow 12t^2 - 24t \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$ với $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

$$\text{Có: } f'(t) = 6t^2 - 6 \text{ nên } f'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}.$$



Ta có: $f(-\sqrt{2}) = -5 - 4\sqrt{2}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(\sqrt{2}) = -5 + 4\sqrt{2}$

Do đó $M = f(0) = 1$, $m = f(-\sqrt{2}) = -5 - 4\sqrt{2}$.

Vậy $M + m = -4 - 4\sqrt{2}$.

Bài toán gốc: Cho $ax^2 + by^2 + cxy = d$. Tìm MGT $t = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$

Phương pháp giải:

Cách 1. Lượng giác hóa

Ta có: $ax^2 + by^2 + cxy = d \Leftrightarrow (a'x + b'y)^2 + (c'x + d'y)^2 = 1$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a'x + b'y = \sin \alpha \\ c'x + d'y = \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \sin \alpha \\ y = n \cos \alpha \end{cases}$$

Suy ra: $t = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \Leftrightarrow A \sin \alpha + B \cos \alpha = C$

Ta có: $A^2 + B^2 \geq C^2$ suy ra MGT của t .

Cách 2:

$$t = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \Leftrightarrow A(mx + ny) + B(kx + qy) = C$$

□

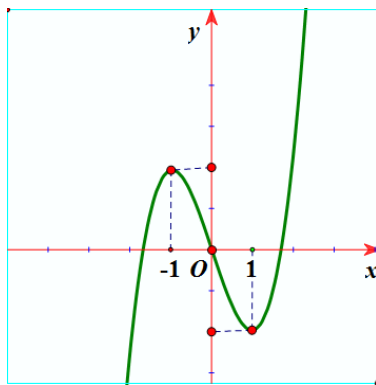
□ Chọn m, n, k, q sao cho $(mx + ny)^2 + (kx + qy)^2 \equiv ax^2 + by^2 + cxy$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + k^2 = a \\ n^2 + q^2 = b \\ 2mn + 2kq = c \end{cases}$$

N.C.Đ

□ Áp dụng BĐT Bunhiacoxki ta có: $C^2 \leq (A^2 + B^2)d$ suy ra MGT của t .

Câu 12. Cho 2 số x, y thỏa mãn $x^2 + 5y^2 = 1 + 4xy$ và hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = f\left(\frac{2x - 3y - 3}{-x + 4y + 4}\right)$.



Tích $M.m$ bằng

A. $\frac{-1436}{1331}$

B. $\frac{3380}{1331}$

C. $\frac{1436}{1331}$

D. $\frac{1944}{1331}$

Lời giải

Chọn C

Để thấy $f(x) = x^3 - 3x$



$$\text{Từ } x^2 + 5y^2 = 1 + 4xy \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + y^2 = 1$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x - 2y = \sin \alpha \\ y = \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin \alpha + 2\cos \alpha \\ y = \cos \alpha \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$\text{Xét } t = \frac{2x - 3y - 3}{-x + 4y + 4} = \frac{2(\sin \alpha + 2\cos \alpha) - 3\cos \alpha - 3}{-(\sin \alpha + 2\cos \alpha) + 4\cos \alpha + 4} = \frac{2\sin \alpha + \cos \alpha - 3}{-\sin \alpha + 2\cos \alpha + 4}$$

$$\text{Ta có: } t(-\sin \alpha + 2\cos \alpha + 4) = 2\sin \alpha + \cos \alpha - 3 \Leftrightarrow (t + 2)\sin \alpha + (1 - 2t)\cos \alpha = 4t + 3 \quad (*)$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow (t + 2)^2 + (2t - 1)^2 \geq (4t + 3)^2 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq \frac{-2}{11}$$

$$\text{Khi đó } P = f(t) = t^3 - 3t \text{ với } -2 \leq t \leq \frac{-2}{11}$$

$$\text{Dễ dàng tìm được } M = 2, m = \frac{718}{1331}. \text{ Vậy } M.m = \frac{1436}{1331}$$

Câu 13. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + 5y^2 + 2xy = 1$ và hàm số $f(t) = t^4 - 2t^2 + 2$

Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q = f\left(\frac{x+y-1}{x+3y-2}\right)$. Tổng $M + m$

A. $4\sqrt{3} + 2$.

B. $8\sqrt{3} - 2$.

C. 66.

D. $9\sqrt{3} + 17$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } x^2 + 5y^2 + 2xy = 1 \Leftrightarrow (x + y)^2 + 4y^2 = 1$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x+y+1}{x+3y-2} \Rightarrow t(x+3y-2) = x+y+1 \Leftrightarrow (2t+1) = (t-1)(x+y) + 2ty$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$(2t+1)^2 = [(t-1)(x+y) + 2ty]^2 \leq ((t-1)^2 + t^2)((x+y)^2 + 4y^2) \Rightarrow (2t+1)^2 \leq (t-1)^2 + t^2$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + 6t \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq t \leq 0$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^4 - 2t^2 + 2 \text{ với } -3 \leq t \leq 0$$

$$\text{Có: } f'(t) = 4t^3 - 4t, \text{ nên } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$f(0) = 2, f(-1) = 1, f(-3) = 65$$

$$\text{Do đó } M = f(-3) = 65; m = f(-1) = 1$$

$$\text{Vậy: } M + m = 66$$

Câu 14. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} xy + yz + zx = 8 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$ và hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Tổng $M + m$

A. 3.

B. $\frac{28}{9}$.

C. $\frac{19}{9}$.

D. 2

Lời giải

Chọn A



Viết lại điều kiện: $\begin{cases} xy + yz + zx = 8 \\ x + y + z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} zy = 8 - x(y + z) \\ y + z = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz = 8 - x(5 - x) \\ y + z = 5 - x \end{cases} (*)$

Vì x, y, z thỏa mãn $(*)$ nên y, z là hai nghiệm của phương trình

$$T^2 - (5 - x)T + 8 - 5x + x^2 = 0 (**)$$

Điều kiện có nghiệm của phương trình $(**)$ là:

$$\Delta = (5 - x)^2 - 4(8 - 5x + x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 7 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{7}{3}$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$ với $1 \leq x \leq \frac{7}{3}$

Có $f'(x) = 2x - 4$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$$f(1) = 2; f(2) = 1; f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{10}{9}$$

Do đó $M = f(1) = 2, m = f(2) = 1$.

Vậy $M + m = 3$.

Câu 15. Cho các số thực dương x, y, z thay đổi và thỏa mãn: $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3}$ bằng

A. 18.

B. 12.

C. 16.

D. 24.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx) \Leftrightarrow 5x^2 - 9(y + z)x + 5y^2 + 5z^2 - 18yz = 0$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 9(y + z)x - 2(y + z)^2 = -7(y - z)^2.$$

Vì $-7(y - z)^2 \leq 0 \Rightarrow 5x^2 - 9(y + z)x - 2(y + z)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2y - 2z)(5x + y + z) \leq 0$

$$\Leftrightarrow x - 2y - 2z \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2(y + z) \Rightarrow 0 < x \leq 2(y + z).$$

Ta có: $P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3} \leq \frac{2(y + z)}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(2y + 2z + y + z)^3}$ Do $(y + z)^2 \leq 2(y^2 + z^2)$

$$\Rightarrow P \leq \frac{2(y + z)}{\frac{1}{2}(y + z)^2} - \frac{1}{27(y + z)^3} = \frac{4}{y + z} - \frac{1}{27(y + z)^3}$$

Đặt $t = \frac{1}{y + z} > 0 \Rightarrow P = 4t - \frac{t^3}{27}$. Đặt $f(t) = 4t - \frac{t^3}{27} \Rightarrow f'(t) = 4 - \frac{t^2}{9}$

$$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 36 \Leftrightarrow t = 6 \text{ (vì } t > 0 \text{)}.$$

Ta có bảng biến thiên của $f(t)$ là:



t	0	6	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$-\infty$	16	0

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(t) \leq 16 \Rightarrow P_{\max} = 16$. Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} y = z \\ x = 2y + 2z \\ \frac{1}{y+z} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z = \frac{1}{12} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 1$ và các số thực m, n thỏa mãn $m^2 - 4mn + 5n^2 = 2\sqrt{2}n - 1$.

Giá trị nhỏ nhất của $f\left(\frac{m-2\sqrt{2}}{n}\right)$ bằng

A. -99.

B. -100.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

N.C.Đ

+) Xét hệ thức $m^2 - 4mn + 5n^2 = 2\sqrt{2}n - 1$, (1).

+) Đặt $\frac{m-2\sqrt{2}}{n} = t$. Ta có $m - 2\sqrt{2} = nt \Leftrightarrow m = nt + 2\sqrt{2}$.

+) Thay vào (1) ta được: $(nt + 2\sqrt{2})^2 - 4(nt + 2\sqrt{2})n + 5n^2 = 2\sqrt{2}n - 1$

$$\Leftrightarrow (t^2 - 4t + 5)n^2 + 2(2\sqrt{2}t - 5\sqrt{2})n + 9 = 0 \quad (2).$$

+) Có các số thực m, n thỏa mãn (1) $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{2}t - 5\sqrt{2})^2 - 9(t^2 - 4t + 5) \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 \leq 0 \Leftrightarrow t \in [-5; 1].$$

+) Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 1$ trên đoạn $[-5; 1]$.

$$f'(t) = 6t^2 + 12t; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [-5; 1] \\ t = -2 \in [-5; 1] \end{cases}.$$

Ta có $f(-5) = -99$, $f(-2) = 9$, $f(0) = 1$, $f(1) = 9$.

Suy ra $\min_{[-5; 1]} f(t) = -99$ khi $t = -5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f\left(\frac{m-2\sqrt{2}}{n}\right)$ bằng -99.

Câu 17. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = \frac{3}{2}$ và biểu thức $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính $x^2 + y^2$.



A. $\frac{25}{16}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{2313}{1156}$.

D. $\frac{153}{100}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y} = \frac{4^2}{4x} + \frac{1^2}{4y} \geq \frac{(4+1)^2}{4x+4y} = \frac{25}{4 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{25}{6}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{4}{4x} = \frac{1}{4y} \Leftrightarrow x = 4y$ mà $x + y = \frac{3}{2}$ nên $\begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{10} \end{cases}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{25}{6}$ khi $\begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{10} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{153}{100}$.

Cách 2:

Ta có $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y} = \left(\frac{4}{x} + \frac{25}{9}x \right) + \left(\frac{1}{4y} + \frac{25}{9}y \right) - \frac{25}{9}(x+y)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$\frac{4}{x} + \frac{25}{9}x \geq 2\sqrt{\frac{4}{x} \cdot \frac{25x}{9}} = \frac{20}{3}$; $\frac{1}{4y} + \frac{25}{9}y \geq 2\sqrt{\frac{1}{4y} \cdot \frac{25y}{9}} = \frac{5}{3} \Rightarrow P \geq \frac{20}{3} + \frac{5}{3} - \frac{25}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{25}{6}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{4}{x} = \frac{25}{9}x \\ \frac{1}{4y} = \frac{25}{9}y \end{cases}$ mà $\begin{cases} x > 0; y > 0 \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{10} \end{cases}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{25}{6}$ khi $\begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{10} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{153}{100}$.

Cách 3:

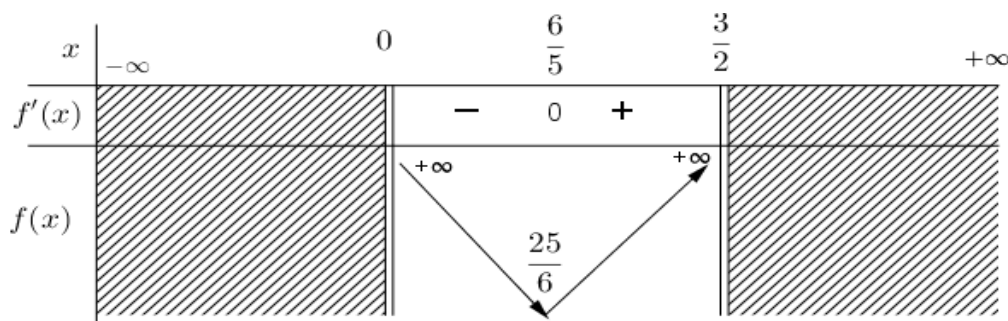
Do $x > 0$ và $x + y = \frac{3}{2}$ nên $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{6-4x}$ trên $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Ta có $f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{(6-4x)^2}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (6-4x)^2 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 6-4x = x \\ 6-4x = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \in \left(0; \frac{3}{2}\right) \\ x = 2 \notin \left(0; \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

Bảng biến thiên



Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{2})^-} f(x) = +\infty$; $f(\frac{6}{5}) = \frac{25}{6}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có $\min_{(0; \frac{3}{2})} f(x) = f(\frac{6}{5}) = \frac{25}{6}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{25}{6}$ khi $\begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{10} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{153}{100}$.

Câu 18. Cho $0 \leq x, y \leq 1$ thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2018}{y^2 - 2y + 2019}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$. Khi đó $M + m$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{383}{16}$.

B. $\frac{136}{3}$.

N.C.Đ

C. $\frac{25}{2}$.

D. $\frac{391}{16}$.

Lời giải

Chọn D

+) $2017^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2018}{y^2 - 2y + 2019} \Leftrightarrow ((1-y)^2 + 2018) \cdot 2017^{1-y} = (x^2 + 2018) \cdot 2017^x \quad (1)$.

+) Xét hàm số $f(t) = (t^2 + 2018) \cdot 2017^t$, $t \geq 0$, ta có:

$f'(t) = 2017^t (t^2 \ln 2017 + 2t + 2018 \cdot \ln 2017) \geq 0$, $\forall t \geq 0$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Từ đó ta có $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(1-y) \Leftrightarrow 1-y = x \Leftrightarrow y = 1-x$.

+) Xét biểu thức: $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$

$= (4x^2 + 3(1-x))(4(1-x)^2 + 3x) + 25x(1-x) = 16x^4 - 32x^3 + 18x^2 - 2x + 12$.

+) Tìm GTLN, GTNN của hàm số $g(x) = 16x^4 - 32x^3 + 18x^2 - 2x + 12$ trên $[0; 1]$.

Ta có: $g'(x) = 64x^3 - 96x^2 + 36x - 2$. Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \in [0; 1] \\ x = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \in [0; 1] \\ x = \frac{1}{2} \in [0; 1] \end{cases}$



Ta có $g\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{191}{16}$; $g\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{191}{16}$; $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{2}$; $g(0) = 12$; $g(1) = 12$.

Khi đó $M = \frac{25}{2}$; $m = \frac{191}{16} \Rightarrow M + m = \frac{391}{16}$.

Cách khác: đặt $t = xy$ với $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$ thì $S = 16t^2 - 2t + 12$. Khảo sát hàm số $y = 16t^2 - 2t + 12$ trên $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ để tìm max, min.

Câu 19. Biết đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tiếp xúc với parabol $y = ax^2 + b$ tại điểm có hoành độ $x \in (0; 2)$. Giá trị lớn nhất của $S = a + b$ là.

A. $S_{\max} = -1$. B. $S_{\max} = 0$. C. $S_{\max} = 1$. D. $S_{\max} = -3$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tiếp xúc với parabol $y = ax^2 + b$ tại điểm có hoành độ

$x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = ax^2 + b & (1) \\ 3x^2 - 3 = 2ax & (2) \end{cases}$ có nghiệm $x \in (0; 2)$.

Vì $x \in (0; 2)$ nên từ (2) suy ra: $2a = \frac{3x^2 - 3}{x}$ thay vào (1) ta được: $2b = -x^3 - 3x + 4$.

Suy ra: $2S = 2a + 2b = -x^3 - \frac{3}{x} + 4$.

N.C.Đ

Xét $f(x) = -x^3 - \frac{3}{x} + 4$ trên khoảng $(0; 2)$.

Ta có: $f'(x) = -3x^2 + \frac{3}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + \frac{3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	0	1	2
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\frac{11}{2}$

Dựa vào BBT, ta có GTLN của $2S = 0$ nên GTLN của $S = 0$.

Vậy đáp án B.

Câu 20. Hàm số $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \dots + (x-2019)^2$ ($x \in \mathbb{R}$) đạt giá trị nhỏ nhất khi x bằng

A. 2020. B. 1010. C. 2019. D. 0.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2(x-1) + 2(x-2) + \dots + 2(x-2019) = 2[2019x - (1+2+\dots+2019)]$$

$$= 2\left[2019x - \frac{2019 \cdot 2020}{2}\right] = 2019(2x - 2020).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2019(2x - 2020) = 0 \Leftrightarrow x = 1010.$$

Ta có BBT:

x	$-\infty$	1010	$+\infty$
y'		0	$+$
y	$+\infty$	y_{CT}	$+\infty$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1010$.**Cách 2:**

$$\text{Ta có } f(x) = 2019x^2 - 2(1+2+3+\dots+2019)x + (1^2+2^2+\dots+2019^2)$$

$$= 2019x^2 - 2 \cdot \frac{2019}{2}(1+2019)x + (1^2+2^2+\dots+2019^2)$$

$$= 2019(x^2 - 2020x + 1010^2) + (1^2+2^2+\dots+2019^2 - 2019 \cdot 1010^2)$$

$$= 2019(x-1010)^2 + (1^2+2^2+\dots+2019^2 - 2019 \cdot 1010^2)$$

$$\geq 1^2+2^2+\dots+2019^2 - 2019 \cdot 1010^2, \forall x. \quad \text{N.C.Đ}$$

Do đó $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 1010$.**Câu 21.** Hàm số $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = a + b \text{ là}$$

A. 2.**B.** 0.**C.** -2.**D.** -1.**Lời giải****Chọn D**

$$\text{Ta có } f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^4 + ax^3 + bx^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + ax + b) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + ax + b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4b \leq 0 \Leftrightarrow b \geq \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Khi đó: } S = a + b \geq a + \frac{a^2}{4} = \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - 1 \geq -1, \forall a.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} b = \frac{a^2}{4} \\ 1 + \frac{a}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -2 \end{cases}.$$

Vậy $\min S = -1$, khi $a = -2, b = 1$.**Câu 22.** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b = 4$. Tính $P = a + 2b + 3c$ khi biểu thức $|2a + b - 2c + 7|$ đạt giá trị lớn nhất.**A.** $P = 7$.**B.** $P = 3$.**C.** $P = -3$.**D.** $P = -7$.



Lời giải

Chọn B

Cách 1: phương pháp đại số.

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b = 4 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9$.

Áp dụng bất đẳng thức giá trị tuyệt đối và bất đẳng thức BCS, ta có kết quả sau:

$$\begin{aligned} |2a + b - 2c + 7| &= |2(a-1) + (b-2) - 2c + 11| \leq |2(a-1) + (b-2) - 2c| + 11 \\ &\stackrel{BCS}{\leq} \sqrt{[(a-1)^2 + (b-2)^2 + c^2][2^2 + 1^2 + (-2)^2]} + 11 = 20. \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} 2(a-1) + (b-2) - 2c > 0 \\ \frac{a-1}{2} = \frac{b-2}{1} = \frac{c}{-2} \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}$$

Khi đó: $P = a + 2b + 3c = 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 3$.

Cách 2: phương pháp hình học.

Trong không gian $Oxyz$, gọi mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 0)$, bán kính $R = 3$. Khi đó:

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 4.$$

và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 7 = 0$.

Gọi $M(a; b; c)$, ta có: $d(M; (P)) = \frac{|2a + b - 2c + 7|}{3}$.

Vì $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b = 4 \Rightarrow M \in (S)$.

Bài toán đã cho trở thành: Tìm $M \in (S)$ sao cho $d(M; (P))$ lớn nhất.

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc $(P) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases}$.

Điểm M cần tìm chính là 1 trong 2 giao điểm của Δ với $(S): M_1(3; 3; -2), M_2(-1; 1; 2)$.

Ta có: $d(M_1; (P)) = \frac{20}{3} > d(M_2; (P)) = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{Max} d(M; (P)) = \frac{20}{3} \Leftrightarrow M \equiv M_1$.

Vậy $P = a + 2b + 3c = 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 3$.

Phân tích: Khi quan sát 2 cách giải, đối với giáo viên ta sẽ dễ chọn Cách 1 vì ngắn gọn và tiết kiệm thời gian. Tuy nhiên học sinh không nhiều em đã từng được tiếp cận bất đẳng thức BCS. Đối với Cách 2, về mặt trình bày có thể dài hơi, nhiều tính toán hơn nhưng đó chỉ là những bước tính toán khá cơ bản, một học sinh khá nếu nhận ra ý đồ tác giả thì việc giải bài toán cũng không mất quá nhiều thời gian. Bài toán sẽ dễ hơn nếu đề bài chỉ yêu cầu tìm Min hoặc Max của biểu thức $|2a + b - 2c + 7|$.

Câu 23. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 4b - 6c = 10$ và $a + c = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = 3a + 2b + c$ khi $Q = a^2 + b^2 + c^2 - 14a - 8b + 18c$ đạt giá trị lớn nhất.



A. 10.

B. -10 .

C. 12.

D. -12 .**Lời giải****Chọn D**

Gọi (S) là mặt cầu tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{24}$. Khi đó:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 10.$$

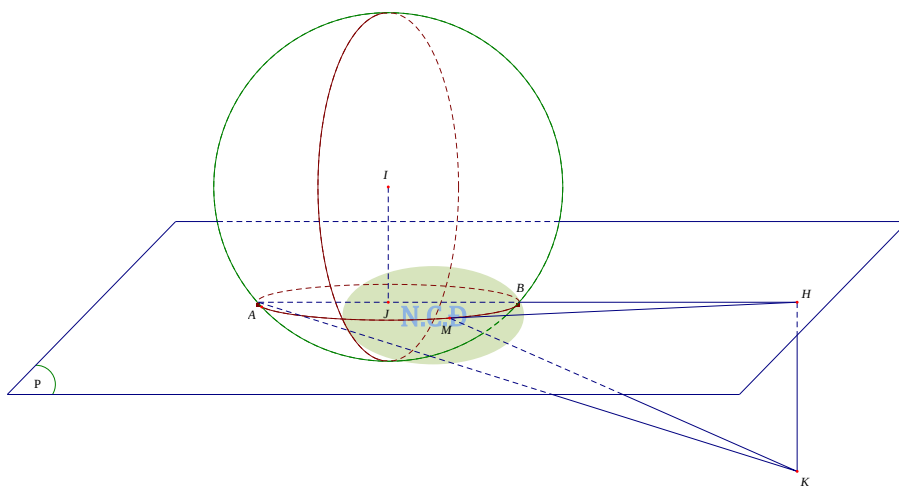
Gọi (P) là mặt phẳng có phương trình $x + z = 2$ và điểm $K(7; 4; -9)$.

Với $M(a; b; c)$. Theo giả thiết ta có: $M \in (S)$ và $M \in (P) \Rightarrow M \in (S) \cap (P)$.

Hơn nữa:

$$Q = a^2 + b^2 + c^2 - 14a - 8b + 18c = (a - 7)^2 + (b - 4)^2 + (c + 9)^2 - 146 = KM^2 - 146.$$

Bài toán trở thành: Tìm M nằm trên đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) sao cho KM lớn nhất.



(P) có VTPT $\vec{n} = (1; 0; 1)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua K và vuông góc $(P) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 7 + t \\ y = 4 \\ z = -9 + t \end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu của K lên mặt phẳng $(P) \Rightarrow H = \Delta \cap (P) \Rightarrow H(9; 4; -7)$.

Ta có: $KM^2 = KH^2 + HM^2$, mà KH không đổi nên KM lớn nhất khi HM lớn nhất.

Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc $(P) \Rightarrow d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Gọi J là tâm đường tròn giao tuyến của (S) và $(P) \Rightarrow J$ là hình chiếu của I lên $(P) \Rightarrow J = d \cap (P) \Rightarrow J(0; -2; 2)$.

Phương trình đường thẳng $HJ: \begin{cases} x = 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$.



Gọi A, B là các giao điểm của HJ và $(S) \Rightarrow A(-3; -4; 5), B(3; 0; -1)$.

Ta có: $HA = 4\sqrt{22} > HB = 2\sqrt{22}$.

Vậy $Max HM = 4\sqrt{22} \Leftrightarrow M \equiv A(-3; -4; 5)$. Khi đó: $P = 3a + 2b + c = -12$.

Câu 24. Cho phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm. Giá trị nhỏ nhất $P = a^2 + b^2 + c^2$ bằng

A. 2.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Gọi x_0 là một nghiệm của phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0 (*)$.

$$\Rightarrow x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + 1 = 0 \Rightarrow ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 = -x_0^4 - 1.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$x_0^4 + 1^2 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 \quad x_0^6 + x_0^4 + x_0^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{x_0^4 + 1^2}{x_0^6 + x_0^4 + x_0^2} \quad (x_0 = 0 \text{ không là nghiệm của phương trình } (*)).$$

$$\text{Đặt } t = x_0^2 (t > 0) \text{ ta có } a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{t^2 + 1^2}{t^3 + t^2 + t}.$$

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{t^2 + 1^2}{t^3 + t^2 + t} \quad (t > 0)$$

N.C.Đ

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{4t^3 + 4t - t^3 - t^2 - t - t^4 + 2t^2 + 1}{t^3 + t^2 + t^2} = \frac{t + 1^2(t^4 - 1)}{t^3 + t^2 + t^2} = \frac{t + 1^3 t - 1}{t^3 + t^2 + t^2}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(t)$	+	0	-	-	0	+
$f(t)$				$+\infty$		

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{0 < t < +\infty} f(t) = \frac{4}{3}$ khi $t = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$.

Khi $a = b = c = \frac{2}{3}$ thì $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}$ và phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm $x_0 = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất $P = a^2 + b^2 + c^2$ bằng $\frac{4}{3}$.



Câu 25. Biết hai hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x - 2$ và $g(x) = -x^3 + bx^2 - 2x + 3$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a| + |b|$.

A. $3\sqrt{2}$.B. $6\sqrt{2}$.**C. 6.**

D. 3.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 4$ và $g'(x) = -3x^2 + 2bx - 2$.

Vì $f(x)$ và $g(x)$ có chung ít nhất một điểm cực trị nên $f'(x) = 0$ và $g'(x) = 0$ có chung

$$\text{nghiệm là } t. \text{ Suy ra } \begin{cases} 3t^2 + 2at + 4 = 0 \\ -3t^2 + 2bt - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-3t^2 - 4}{2t} \\ b = \frac{3t^2 + 2}{2t} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } P = |a| + |b| = \left| \frac{-3t^2 - 4}{2t} \right| + \left| \frac{3t^2 + 2}{2t} \right| = \frac{3t^2 + 3}{|t|} = 3 \left(|t| + \frac{1}{|t|} \right) \geq 6. \text{ (bất đẳng thức Cauchy)}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } |t| = \frac{1}{|t|} \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Vậy $\min P = 6$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

N.C.Đ

Bài 1: Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1;3]$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$. Tìm giá trị

$$\text{lớn nhất của biểu thức } P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc$$

$$\text{Đặt } x = ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 12$$

$$\text{Ta có: } a, b, c \in [1;3] \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1) \geq 0 \Rightarrow abc - (ab + bc + ca) + a + b + c - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow abc - x + 5 \geq 0 \Rightarrow abc \geq x - 5$$

$$\text{Lại có: } (a-3)(b-3)(c-3) \leq 0 \Rightarrow abc - 3(ab + bc + ca) + 9(a + b + c) - 27 \leq 0$$

$$\Rightarrow abc \leq 3x - 27. \text{ Do đó: } 3x - 27 \geq abc \geq x - 5 \Rightarrow 2x \geq 22 \Rightarrow x \geq 11.$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{x^2 + 72}{x} - \frac{1}{2}abc \leq \frac{x^2 + 72}{x} - \frac{1}{2}(x - 5) = \frac{x}{2} + \frac{72}{x} + \frac{5}{2}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{x}{2} + \frac{72}{x} + \frac{5}{2}, x \in [11;12]$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{72}{x^2} \leq 0 \forall x \in [11;12] \text{ nên } P \leq f(x) \leq f(11) = \frac{160}{11}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{160}{11} \text{ khi } a = 1; b = 2; c = 3$$

Nhận xét: Đây là bài toán rất hay. Ta phải dùng hai lần giả thiết của các biến

$a; b; c \in [1;3]$ để tìm ra miền giá trị của $x = ab + bc + ca$ và đánh giá được P thông qua biến x .

Cũng từ bài toán trên phải chăng bằng việc đánh giá điều kiện ban đầu chúng ta sẽ giải quyết được một lớp các bài toán dạng này bằng cách đưa về hàm số một biến, chính vì vậy qua chuyên



đề này tác giả muốn rèn luyện cho học sinh kỹ năng giải toán cực trị bằng phương pháp đơn biến.

Bài 2: Cho $x, y, z \in [1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{2(xy + yz + zx)}{xyz + 2(2x + y + z)} + \frac{8}{2x(y + z) + yz + 4} - \frac{y + z + 4}{\sqrt{yz} + 1}$$

Lời giải

Vì $x, y, z \in [1; 2]$, nên ta có

$$(x - 1)(y - 2)(z - 2) \geq 0 \Leftrightarrow xyz + 2(2x + y + z) \geq 2(y + z)x + yz + 4$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$ hoặc $y = 2$ hoặc $z = 2$. Do đó

$$A \leq \frac{2(xy + yz + zx)}{2x(y + z) + yz + 4} + \frac{8}{2x(y + z) + yz + 4} - \frac{y + z + 4}{\sqrt{yz} + 1} = \frac{2x(y + z) + yz + 4 + yz + 4}{2x(y + z) + yz + 4} - \frac{y + z + 4}{\sqrt{yz} + 1}$$

$$A \leq 1 + \frac{yz + 4}{2x(y + z) + yz + 4} - \frac{y + z + 4}{\sqrt{yz} + 1} \leq 1 + \frac{yz + 4}{2(y + z) + yz + 4} - \frac{y + z + 4}{\sqrt{yz} + 1}$$

$$A \leq 1 + \frac{yz + 4}{yz + 4\sqrt{yz} + 4} - \frac{2\sqrt{yz} + 4}{\sqrt{yz} + 1}$$

Đặt $t = \sqrt{yz}$; $t \in [1; 2]$

Xét hàm số: $f(t) = 1 + \frac{t^2 + 4}{(t + 2)^2} - \frac{2t + 4}{t + 1}$ với $t \in [1; 2]$

Ta có $f'(t) = \frac{4t - 8}{(t + 2)^3} + \frac{2}{(t + 1)^2} \geq \frac{4}{27} + \frac{2}{9} > 0$, nên $f(t)$ đồng biến trên $[1; 2]$.

$$\text{Suy ra } A \leq f(t) \leq f(2) = -\frac{7}{6}$$

Vậy $\max A = -\frac{7}{6}$ khi $x = 1; y = z = 2$

Bài 3: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a \leq 1, b \leq 2, c \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B = \frac{2(2ab + ac + bc)}{1 + 2a + b + 3c} + \frac{8 - b}{b + c + b(a + c) + 8} + \frac{b}{\sqrt{12a^2 + 3b^2 + 27c^2} + 8}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \sqrt{12a^2 + 3b^2 + 27c^2} = \sqrt{3(4a^2 + b^2 + 9c^2)} \geq 2a + b + 3c \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } 2a + b + 3c - b - c - b(a + c) = (a + c)(2 - b) \geq 0$$

$$\Rightarrow 2a + b + 3c \geq b + c + b(a + c) \quad (2)$$

$$\text{Lại có } 2ab + ac + bc - b - c - b(a + c) = (b + c)(a - 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow 2ab + ac + bc \leq b + c + b(a + c) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta được

$$B \leq \frac{2[b + c + b(a + c)]}{1 + b + c + b(a + c)} + \frac{8 - b}{b + c + b(a + c) + 8} + \frac{b}{b + c + b(a + c) + 8}$$

$$B \leq \frac{2[b + c + b(a + c)]}{1 + b + c + b(a + c)} + \frac{8}{b + c + b(a + c) + 8}$$

Đặt $t = b + c + b(a + c) \Rightarrow 0 \leq t \leq 13$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t}{t + 1} + \frac{8}{t + 8}$ với $t \in [0; 13]$

$$f'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{8}{(t+8)^2} = \frac{2(3t+10)(6-t)}{(t+1)^2(t+8)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

$$f(0) = 1, f(6) = \frac{16}{7}, f(13) = \frac{47}{21}$$

Từ đó suy ra $B \leq f(t) \leq \frac{16}{7} \Rightarrow \max B = \frac{16}{7}$ đạt được khi $a = 1, b = 2, c = \frac{2}{3}$

Bài 4: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $y + z = x(y^2 + z^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $x(y+z)^2 \leq 2x(y^2 + z^2) = 2(y+z) \Leftrightarrow y+z \leq \frac{2}{x}$

$$\text{Do đó: } (1+y)(1+z) \leq \frac{1}{4}(2+y+z)^2 \leq \frac{1}{4}\left(2+\frac{2}{x}\right)^2 = \frac{(1+x)^2}{x^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $P \geq \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+y)(1+z)} + \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$

$$P \geq \frac{2x^2+1}{(1+x)^2} + \frac{4x^2}{(1+x)^3} = \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$$

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{2(5x-1)}{(1+x)^4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}. \quad \text{N.C.Đ}$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta được: } P \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{91}{108}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{91}{108}$. Khi $x = \frac{1}{5}, y = z = 5$.

Bài 5: Cho $a > b > c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right]$$

Lời giải

Nhận xét: Giả thiết đã cho chính là gợi ý của bài toán. Cách làm giảm biến số quen thuộc là đặt $a = c + x, b = c + y \Rightarrow x > y > 0$

Khi đó:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= (c+x)^2 + (c+y)^2 + c^2 - (c+x)(c+y) - (c+y)c - c(c+x) \\ &= x^2 + y^2 - xy \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta viết lại } P \text{ dưới dạng } P = (x^2 - xy + y^2) \left[\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} \right]$$

Như vậy với cách đặt ẩn phụ này, ta đã làm giảm số biến của P thành hai biến.

Thậm chí là P là đồng bậc giữa x và y . Ta chỉ việc đặt ẩn phụ quen thuộc

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} > 1 \text{ ta được } P = (t^2 - t + 1) \left[\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t^2} + 1 \right] = f(t);$$

Xét hàm $f(t)$ trên $(1; +\infty)$ ta có:

$$f'(t) = (2t-1) \left[\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t^2} + 1 \right] + (t^2-t+1) \left[-\frac{2}{(t-1)^3} - \frac{2}{t^3} \right]$$

$$f'(t) = \frac{(2t-1)[t^3(t-1) + t(t-1)^3 + t^3(t-1)^3] - 2(t^2-t+1)[t^3 + (t-1)^3]}{t^3(t-1)^3}$$

Cách đặt này khá phức tạp. Ta có thể đặt theo cách khác sau đây

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow t > 2$. Khi đó ta có

$$P = \left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x} \right) \left[\frac{xy}{(x-y)^2} + \frac{xy}{y^2} + \frac{xy}{x^2} \right] = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \right) \left(\frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

$$P = (t-1) \left(\frac{1}{t-2} + t \right) = \frac{(t-1)^3}{t-2} = f(t)$$

Xét hàm $f(t)$ trên $(2; +\infty)$ ta được: $\ln f(t) = 3\ln(t-1) - \ln(t-2)$

$$\Rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{3}{t-1} - \frac{1}{t-2} = \frac{2t-5}{(t-1)(t-2)}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{(2t-5)(t-1)^2}{(t-2)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta được } P = f(t) \geq f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{27}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow a = b + d = c + 2d, \forall d > 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{27}{4}$

Bài 6: Cho $x, y, z > 0; xyz(x+y+z) = 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (x+y)(x+z) + y^2z^2$

Lời giải

Nhận xét: Có một chú ý quan trọng của bài 6 là một phép biến đổi nhỏ

$$(x+y)(x+z) = x^2 + xy + xz + yz = x(x+y+z) + yz = \frac{20}{yz} + yz$$

Như vậy biến mới được hình thành.

Đặt $t = yz > 0$ suy ra $P = \frac{20}{t} + t + t^2 = f(t)$. Xét $f(t) = t^2 + t + \frac{20}{t}$ trên $(0; +\infty)$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 2t + 1 - \frac{20}{t^2} = \frac{2t^3 + t^2 - 20}{t^2} = \frac{(t-2)(2t^2 + 5t + 10)}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $f(t) \geq f(2) = 16$

Do đó $P \geq 16$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xyz(x+y+z) = 10 \\ yz = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

Kết luận: $\min P = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

Bài 7: Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left| \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right|$

Lời giải

Nhận xét: Khi gặp bài toán trên, ta chưa thể tìm cách phá giá dấu giá trị tuyệt đối. Do vậy cứ thử quy đồng và tách tung ra xem có gì đặc biệt không. Bởi vì lưu ý rằng: khi cho $a = b, b = c, c = a \Rightarrow P = 0$. Nên sau khi biến đổi chắc chắn sẽ chứa nhân tử $(a - b)(b - c)(c - a)$

$$\text{Do đó: } P = \left| \frac{ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)}{abc} \right| = \left| \frac{ab(a-b) - bc(a-b) + bc(a-c) - ca(a-c)}{abc} \right|$$

$$P = \left| \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \right|$$

Đến đây ta giả sử $\frac{1}{2} \leq c \leq b \leq a \leq 1$ để mục tiêu làm mất dấu giá trị tuyệt đối.

$$P = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$$

Nhận xét rằng có một phép biến đổi làm giảm biến số một cách đơn giản là

$$\text{Đặt: } \begin{cases} x = \frac{a}{c} \\ y = \frac{b}{c} \end{cases} \Rightarrow 1 \leq y \leq x \leq 2$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{(x-y)(y-1)(x-1)}{xy} = \frac{x-1}{x} \cdot \left[x+1 - \left(y + \frac{x}{y} \right) \right] = f(x; y)$$

Mục tiêu viết như trên là đạo hàm theo biến y (hoặc biến x).

$$f'_y(x; y) = \frac{x-1}{x} \cdot \left(-1 + \frac{x}{y^2} \right) \Rightarrow f'_y(x; y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{x} \in [1; x]$$

Lập bảng biến thiên ta thu được

N.C.Đ

$$P = f(x; y) \leq f(x; \sqrt{x}) = \frac{(x-\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)(x-1)}{x\sqrt{x}} = \frac{(t^2-t)(t-1)(t^2-1)}{t^3}, t = \sqrt{x} \in [1; \sqrt{2}]$$

$$\text{hay } P \leq \frac{(t-1)^3(t+1)}{t^2} = g(t)$$

Xét hàm $g(t)$ trên $(1; \sqrt{2})$ ta có: $\ln g(t) = 3 \cdot \ln(t-1) + \ln(t+1) - 2 \cdot \ln t$

$$\Rightarrow \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{3}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{2}{t} = \frac{3t^2 + 3t + t^2 - t - 2t^2 + 2}{(t-1)(t+1)t} = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(t-1)(t+1)t} > 0; \forall t \in (1; \sqrt{2})$$

$$\text{Từ đó ta có } g(t) \leq g(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2}-1)^3(\sqrt{2}+1)}{2} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}.$$

$$\text{Nhu vậy } P \leq g(t) \leq \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ t = \sqrt{x} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = c\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow (a; b; c) = \left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2} \Leftrightarrow (a; b; c) = \left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

Bài 8: Cho $a, b, c > 0, a^2 + 2b^2 \leq a^2b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{c}{b} + \frac{c}{a} - (c-1)^2$

Lời giải

Nhận xét: Giả thiết chỉ cho dữ liệu liên quan tới a, b dù không dự đoán được đẳng thức xảy ra nhưng ta vẫn có thể khai thác được giả thiết bằng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz với mục tiêu là chỉ còn biến c .

Ta có: $\left(\frac{c}{x} \cdot \frac{x}{b} + \frac{c}{y} \cdot \frac{y}{a}\right)^2 \leq \left(\frac{c^2}{x^2} + \frac{c^2}{y^2}\right) \left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}\right)$

Từ thiết $a^2 + 2b^2 \leq a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a^2} \leq 1$

Như vậy ta phải chọn $x^2 = 1, y^2 = 2$

Do đó ta có: $P = \frac{c}{b} + \frac{c}{a} - (c-1)^2 \leq \sqrt{\left(\frac{c^2}{1} + \frac{c^2}{2}\right) \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2}{a^2}\right)} - (c-1)^2 \leq c\sqrt{\frac{3}{2}} - c^2 + 2c - 1$

$\Rightarrow P \leq -c^2 + \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)c - 1 = f(c)$

Xét hàm số $f(c)$ trên $(0; +\infty)$ ta có: $f'(c) = -2c + \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \Rightarrow f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 1 + \frac{\sqrt{6}}{4}$

Lập bảng biến thiên ta suy ra: $P \leq f(c) \leq f\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy $\max P = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow a = \sqrt{6}, b = \frac{\sqrt{6}}{2}, c = 1 + \frac{\sqrt{6}}{4}$

Bài 9: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a, c \geq 1; b \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a(b+c)}{b+2c} + \frac{c(a+b)}{b+2a} + \frac{3(a+c)^2 + 2b^2 + 8}{4(3+ac)}$$

Lời giải

Ta có $(1-a)(2-b) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - 2a - b + ab \geq 0 \Leftrightarrow 2a + b \leq ab + 2$

$\Rightarrow \frac{1}{b+2a} \geq \frac{1}{ab+2} \Rightarrow \frac{c(a+b)}{b+2a} \geq \frac{c(a+b)}{ab+2}$

Tương tự ta có $\frac{a(b+c)}{b+2c} \geq \frac{a(b+c)}{bc+2}$

Lại có

$3(a+c)^2 + 2b^2 + 8 = 2[(a+c)^2 + b^2] + (a+c)^2 + 8 \geq 4(a+c)b + 4ac + 8 = 4(ab+ac+bc+2)$

$\Rightarrow P \geq \frac{c(a+b)}{ab+2} + \frac{a(b+c)}{bc+2} + \frac{4(ab+bc+ca+2)}{4(ac+3)}$

$= \left(\frac{ac+bc}{ab+2} + 1\right) + \left(\frac{ab+bc}{bc+2} + 1\right) + \left(\frac{ab+bc+ca+2}{ac+3}\right) - 2$

$= (ab+bc+ca+2) \left(\frac{1}{ab+2} + \frac{1}{bc+2} + \frac{1}{ac+3}\right) - 2 \geq \frac{9(ab+bc+ca+3)}{ab+bc+ca+7} - 2$

Xét hàm số $f(t) = \frac{9(t+2)}{t+7} - 2 = 7 - \frac{45}{t+7}$ mà $t = ab+bc+ca \geq 5 \Rightarrow P \geq 7 - \frac{45}{5+7} = \frac{13}{4}$

Vậy $\min P = \frac{13}{4} \Leftrightarrow (a; b; c) = (1; 2; 1)$

Bài 10: Cho các số thực $x, y, z \in [0; 1]$ và $z = \min\{x, y, z\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}} + \frac{yz+1}{\sqrt{y(y+z)}} + \frac{2}{xy+xz-yz}$$

Lời giải

Với những bài toán có điều kiện ban đầu $x, y, z \in [0; 1]$ chúng ta sẽ tìm cách khai thác nó, dự đoán điểm rơi là $z = y = 1; z = 0$

Hơn nữa với $\frac{2}{xy+xz-yz}$ có chứa $xy+xz-yz$ ở mẫu, đây là hạng tử có thể gợi ý cho chúng ta dồn biến về $xy+xz-yz$.

Ta có $x \in [0;1]$ suy ra $\sqrt{x} \geq x^2$; $\frac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}} = \frac{\sqrt{x}(y+z)^2}{\sqrt{x}\sqrt{x+z}} \geq \frac{x^2(y+z)^2}{\sqrt{x}\sqrt{x+z}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{1}{\sqrt{A.B}} \geq \frac{2}{A+B}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A=B>0$. Vì dự đoán điểm rơi $z=y=1; z=0$ nên khả năng $x=x+z$ và $y=y+z$ là hoàn toàn có thể xảy ra.

Ta có: $\frac{x^2(y+z)^2}{\sqrt{x(x+z)}} \geq x^2(y+z)^2 \cdot \frac{2}{2x+z}$ và $\frac{(yz+1)^2}{\sqrt{y(y+z)}} \geq (yz+1)^2 \cdot \frac{2}{2y+z}$

Do đó $P \geq \frac{2x^2(y+z)^2}{2x+z} + \frac{2(yz+1)^2}{2y+z} + \frac{2}{xy+xz-yz} \geq \frac{(xy+yz+xz+1)^2}{x+y+z} + \frac{2}{xy+xz-yz}$

Với điều kiện $x, y, z \in [0;1]$ ta luôn có

$(1-x)(1-y)(1-z) \geq 0 \Leftrightarrow xy+yz+xz+1 \geq xyz+x+y+z \geq x+y+z$

Suy ra $P \geq x+y+z + \frac{2}{xy+xz-yz}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$x^2+(y+z)^2 \geq 2x(y+z) \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \geq 2(xy+xz-yz)$

Mà $x, y, z \in [0;1] \Rightarrow x+y+z \geq x^2+y^2+z^2 \geq 2(xy+xz-yz)$

$\Rightarrow P \geq 2(xy+xz-yz) + \frac{2}{xy+xz-yz} \geq 4$ N.C.Đ

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=y=1 \\ z=0 \end{cases}$

Vậy $\min P = 4$ đạt được khi $x=y=1; x=0$

Bài 11: Cho các số $a, b, c \in [0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} + abc$

Lời giải

Không mất tính tổng quát của bài toán, ta có thể giả sử $0 \leq c \leq b \leq a \leq 1$

Ta có $P = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} + abc \leq \frac{1}{1+bc} + \frac{b}{1+bc} + \frac{c}{1+bc} + bc \leq bc + \frac{1}{1+bc} + \frac{b+c}{1+bc}$

Từ giả thiết ta được $(1-b)(1-c) \geq 0 \Leftrightarrow 1-bc \geq b+c \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b+c}{1+bc} \leq 1$

Suy ra $A \leq bc + 1 + \frac{1}{1+bc}$. Đặt $t = 1+bc \Rightarrow 1 \leq t \leq 2$. Xét hàm số $f(t) = t + \frac{1}{t}; t \in [1;2]$

Ta có $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \geq 0 \forall t \in [1;2]$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[1;2] \Rightarrow f(t) \leq f(2) = \frac{5}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{5}{2}$ khi $a=b=c=1$

Bài 12: Cho các số thực $a, b, c \in [1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2+b^2+2ab}{c^2+4(ab+bc+ca)}$

Lời giải

Áp dụng hệ quả $1(a+b)^2 \geq 4ab$



$$\text{Ta có } P = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{c^2 + 4(ab + bc + ca)} \geq \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4c(a+b) + (a+b)^2} = M$$

Do $a, b, c \in [1; 2]$ nên $a+b \neq 0$, chia tử và mẫu của M cho $(a+b)^2$ ta được:

$$M = \frac{1}{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{a+b}\right) + 1} = \frac{1}{t^2 + 4t + 1} \text{ với } t = \frac{c}{a+b}.$$

Với $a, b, c \in [1; 2]$ và $t = \frac{c}{a+b} \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$. Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{t^2 + 4t + 1}$ trên $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$

Ta có $f'(t) = \frac{-2(t+2)}{(t^2 + 4t + 1)^2} < 0, \forall t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{1}{6}; \forall t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \text{ hay } P \geq \frac{1}{6}$$

Vậy $\text{Min}P = \frac{1}{6}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a = b = 1$ và $c = 2$

Bài 13: Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $c > 0$ và $a^3 + b^3 = c(c-1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức: } P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2}$$

Lời giải

Nhận xét: từ giả thiết ta nhận thấy các biến a và b có tính chất đối xứng, do đó để giải bài toán

$$\text{ta sử dụng } a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$$

N.C.Đ

$$\text{Ta có: } P \geq \frac{\frac{(a+b)^2}{2} + c^2}{(a+b+c)^2} = \frac{\left(\frac{a+b}{c}\right)^2 + 2}{2\left(\frac{a+b}{c} + 1\right)^2} \text{ vì } c > 0$$

$$\text{Với hai số thực } x, y \text{ tùy ý, ta có } x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2 \geq \frac{1}{4}(x+y)^2.$$

Từ giả thiết $c > 0$ và $a^3 + b^3 = c(c-1)$ sử dụng đánh giá trên ta thu được

$$c^2 = c + a^3 + b^3 = c + (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq c + \frac{(a+b)^3}{4} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{(a+b)^3}{4}} \Rightarrow 0 \leq \frac{a+b}{c} \leq 1.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{a+b}{c} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1 \text{ (vì } a, b \geq 0 \text{ và } c > 0). \text{ Khi đó } P \geq \frac{t^2 + 2}{2(t+1)^2}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 + 2}{2(t+1)^2} \text{ trên } [0; 1], \text{ ta có } f'(t) = \frac{t-2}{(t+1)^3} < 0, \forall t \in [0; 1]$$

$$\text{Do đó } f(t) \text{ là hàm số nghịch biến trên } [0; 1] \Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{3}{8}, \forall t \in [0; 1]$$

$$\text{Hay } P \geq \frac{3}{8}, \forall a, b, c \geq 0 \text{ thỏa mãn } c > 0 \text{ và } a^3 + b^3 = c(c-1).$$

$$\text{Vậy } \text{Min}P = \frac{3}{8}, \text{ giá trị nhỏ nhất đạt được khi } a = b = 1; c = 2$$

Bài 14: Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x + y + z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x+y+z)^3}$$

Lời giải

Ta có $P = \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3 + \left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3 + 16\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3$

Áp dụng hệ quả 2 ta có $\left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3 + \left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3 \geq \frac{1}{4}\left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z}{x+y+z}\right)^3$

Do đó $P \geq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z}{x+y+z}\right)^3 + 16\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3$. Đặt $t = \frac{z}{x+y+z} \Rightarrow t \in [0;1)$.

Khi đó $P \geq \frac{1}{4}(1-t)^3 + 16t^3$. Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{4}(1-t)^3 + 16t^3$ trên $[0;1)$

Ta có $f'(t) = \frac{189t^2 + 6t - 3}{4} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{9} \in [0;1) \\ t = -\frac{1}{7} \notin [0;1) \end{cases}$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{81}, \forall t \in [0;1) \Rightarrow P \geq f(t) \geq \frac{16}{81}$

Vậy $\min P = \frac{16}{81}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = 4z$

Bài 15: Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2) - z^2}$$

Lời giải

Nhận xét: Ta chỉ cần biến đổi $2(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2) - z^2 = z^2 + 4(x+y)z + 4xy$

Ta có $P = \frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2) - z^2} = \frac{(x+y)^2}{z^2 + 4(x+y)z + 4xy}$

Ta có $4xy \leq (x+y)^2$. Do đó $P \geq \frac{(x+y)^2}{z^2 + 4(x+y)z + (x+y)^2} = \frac{\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right)^2}{1 + 4\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right)^2}$

Đặt $t = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$, vì x, y, z thuộc đoạn $[1;2] \Rightarrow t \in [1;4]$. Khi đó ta có $P \geq \frac{t^2}{1 + 4t + t^2}$

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2}{1 + 4t + t^2}$ trên $[1;4]$

Ta có $f'(t) = \frac{4t^2 + 2t}{(1 + 4t + t^2)^2} \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in [1;4]$. Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên

$[1;4]$. Do đó $f(t) \geq f(1) = \frac{1}{6}, \forall t \in [1;4]$ hay $P \geq \frac{1}{6}, \forall x, y, z \in [1;2]$

Vậy $\min P = \frac{1}{6}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = 1$ và $z = 2$

Bài 16: Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



Lời giải

Vì $c > 0$ do đó ta có $P = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c} + 1} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c} + 1} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}}$

Đặt $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c} \Rightarrow x, y > 0$ (vì $a, b, c > 0$) khi đó biểu thức P trở thành

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

Biến đổi giả thiết $\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}$ ta thu được

$$\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow x^2 y^2 = 2(x^2 + y^2)$$

Ta có $x^2 y^2 = 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2 \Rightarrow xy \geq x+y$

$$\text{và } x^2 + y^2 + 1 = (x+y)^2 - 2xy + 1 \leq (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 = (x+y-1)^2 \quad (1)$$

Ta lại có $(x+y)^2 \geq 4xy \geq 4(x+y) \Rightarrow x+y \geq 4 \quad (2) \quad (\text{vì } x, y > 0)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \leq x+y-1$

Biến đổi biểu thức P , ta thu được

$$P+2 = \frac{x}{y+1} + 1 + \frac{y}{x+1} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} = (x+y+1) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

Từ hệ quả 3, ta có: $P+2 \geq (x+y+1) \frac{4}{x+y+2} + \frac{1}{x+y-1} \Rightarrow P \geq 2 - \frac{4}{x+y+2} + \frac{1}{x+y-1}$

Đặt $t = x+y \Rightarrow t \geq 4$. Do đó $P \geq 2 - \frac{4}{t+2} + \frac{1}{t-1}$

Xét hàm số $f(t) = 2 - \frac{4}{t+2} + \frac{1}{t-1}$ trên $[4; +\infty)$

Ta có $f'(t) = \frac{3t(t-4)}{(t-1)^2(t+2)^2} \geq 0, \forall t \in [4; +\infty)$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (vì $t \in [4; +\infty)$)

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[4; +\infty)$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(4) = \frac{5}{3}, \forall t \in [4; +\infty) \text{ hay } P \geq f(t) \geq \frac{5}{3}$$

Vậy $\min P = \frac{5}{3}$ giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a = b = 2c$

Bài 17: Cho các số thực dương x, y, z thay đổi thỏa mãn điều kiện $x+2y-z \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{10y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{x+2y}{2x+3y}$

Lời giải

Ta có $x+2y-z \geq 0 \Leftrightarrow z \leq x+2y \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z \leq 2x+3y \\ 10y+z \leq x+12y \end{cases}$

Do đó $P = \frac{x}{10y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{x+2y}{2x+3y} \geq \frac{x}{x+12y} + \frac{y}{2x+3y} + \frac{x+2y}{2x+3y}$



$$\Rightarrow P \geq \frac{x}{x+12y} + \frac{x+3y}{2x+3y} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+12} + \frac{\frac{x}{y}+3}{2\frac{x}{y}+3}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} \Rightarrow t > 0. \text{ Khi đó } \Rightarrow P \geq \frac{t}{t+12} + \frac{t+3}{2t+3}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t}{t+12} + \frac{t+3}{2t+3} \text{ trên } (0; +\infty)$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{12t}{(t+12)^2} - \frac{3}{(2t+3)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t+12)^2 = 4(2t+3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \in (0; +\infty) \\ t = -\frac{18}{5} \notin (0; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Lập bảng biến thiên suy ra } f(t) \geq f(2) = \frac{6}{7}, \forall t \in (0; +\infty). \text{ Suy ra } P \geq \frac{6}{7}.$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{6}{7}, \text{ giá trị nhỏ nhất đạt được khi } x = 2y, z = 4y.$$

Nhận xét ta có thể coi P là hàm của z và x, y là tham số và xét hàm $P(z)$ trên $(0; x+2y]$

Bài 18: Cho các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a \geq b, a \geq c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{5(a+b+c)} + \frac{b}{5a-2c} + \frac{c}{5a-2b}$

Lời giải

$$\text{Vì } a > 0 \text{ do đó } P = \frac{1}{5\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)} + \frac{\frac{b}{a}}{5 - 2 \cdot \frac{c}{a}} + \frac{\frac{c}{a}}{5 - 2 \cdot \frac{b}{a}}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = \frac{b}{a} \\ y = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow x, y \in (0; 1] \text{ vì } a, b, c > 0 \text{ và } a \geq b, a \geq c.$$

$$\text{Khi đó biểu thức } P \text{ được viết lại như sau: } P = \frac{1}{5(1+x+y)} + \frac{x}{5-2y} + \frac{y}{5-2x}$$

$$\Rightarrow 2P - 2 = \frac{2}{5(1+x+y)} + (2x+2y-5) \left(\frac{1}{5-2y} + \frac{1}{5-2x} \right)$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{5-2x} + \frac{1}{5-2y} \geq \frac{4}{10-2x-2y} \text{ và } 2x+2y-5 < 0, \forall x, y \in (0; 1]$$

$$\text{Do đó } 2P - 2 \leq \frac{2}{5(1+x+y)} + (2x+2y-5) \frac{4}{10-2x-2y}$$

$$\text{hay } P \leq \frac{2}{5(1+x+y)} + \frac{5}{5-x-y} - 1$$

$$\text{Đặt } t = x+y \Rightarrow t \in (0; 2] \text{ vì } x, y \in (0; 1].$$

$$\text{Khi đó ta có } P \leq \frac{2}{5(t+1)} + \frac{5}{5-t} - 1$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{2}{5(t+1)} + \frac{5}{5-t} - 1 \text{ trên } (0; 2]$$



$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{25(t+1)^2 - (t-5)^2}{5(t+1)^2(t-5)^2} = \frac{24t^2 + 60t}{5(t+1)^2(t-5)^2} > 0, \forall t \in (0; 2]$$

Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0; 2] \Rightarrow f(t) \leq f(2) = \frac{11}{15}, \forall t \in (0; 2]$

hay $P \leq \frac{11}{15}$, với mọi $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a \geq b, a \geq c$.

Vậy $\text{Max}P = \frac{11}{15}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $a = b = c$

Bài 19: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $0 < x < y < z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^3 z}{y^2(xz + y^2)} + \frac{y^4}{z^2(xz + y^2)} + \frac{z^3 + 15x^3}{x^2 z}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z}} + \frac{\left(\frac{y}{z}\right)^3}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z}} + \left(\frac{z}{x}\right)^2 + \frac{15}{\frac{z}{x}}. \text{ Đặt } a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x} \Rightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \\ c > 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{a+b} + c^2 + \frac{15}{c}$$

$$\text{Áp dụng hệ quả 2, ta có } P \geq \frac{ab(a+b)}{a+b} + c^2 + \frac{15}{c} = c^2 + \frac{16}{c}$$

Xét hàm số $f(c) = c^2 + \frac{16}{c}$ trên $(1; +\infty)$. Ta có $f'(c) = 2c - \frac{16}{c^2} \Rightarrow f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 2$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(c) \geq f(2) = 12, \forall c \in (1; +\infty)$

$$\text{Vậy } \text{Min}P = 12 \text{ giá trị nhỏ nhất đạt được khi } \begin{cases} a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c = 2 \end{cases} \text{ hay } 2x = y\sqrt{2} = z$$

Bài 20: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} = \sqrt{\frac{ab}{c}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{của biểu thức: } P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

Lời giải

$$\text{Đặt } a = xc; b = yc; (x, y \geq 1)$$

Thay $x = 1$ vào giả thiết ta có: $\sqrt{b-c} = \sqrt{b} \Rightarrow c = 0$ (không thỏa mãn giả thiết)

Tương tự $y = 1$ cũng không thỏa mãn.

$\Rightarrow x > 1; y > 1$ thay vào giả thiết ta có:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = \sqrt{xy} \Leftrightarrow x + y - 2 + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} = xy$$

$$\Leftrightarrow x - x - y + 1 - 2\sqrt{(x-1)(y-1)} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{(x-1)(y-1)} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(y-1)} = 1 \Leftrightarrow xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \geq 4$$

Mặt khác

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{xy+x} + \frac{y^2}{xy+y} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{(x+y)^2 - 2xy}$$



$$\Rightarrow P \geq \frac{(x+y)^2}{2xy+x+y} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{(x+y)^2 - 2xy}$$

$$\text{Hay } P \geq \frac{xy}{3} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2y^2 - 2xy} = \frac{(xy)^3 - 2(xy)^2 + 3xy - 3}{3[(xy)^2 - 2xy]}$$

$$\text{Đặt } t = xy; t \geq 4, \text{ khi đó ta có } P \geq \frac{t^3 - 2t^2 + 3t - 3}{3(t^2 - 2t)}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^3 - 2t^2 + 3t - 3}{3(t^2 - 2t)} \text{ trên } [4; +\infty)$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{t^4 - 4t^3 + t^2 + 6t - 6}{3(t^2 - 2t)^2} = \frac{t^3(t-4) + t^2 + 6(t-4) + 18}{3(t^2 - 2t)^2} > 0, \forall t \geq 4$$

$$\text{Suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } [4; +\infty). \text{ Do đó: } \min_{[4; +\infty)} f(t) = f(4) = \frac{41}{24}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{41}{24} \text{ khi } x = y = 2 \text{ hay } a = b = 2c$$

Bài 21: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a \geq b \geq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{(a^2 + c^2)\sqrt{ab + bc + ca}}{abc(a + b + c)}$$

Lời giải

$$\text{Đặt } a = xb; c = yb \Rightarrow 0 < y \leq 1 \leq x$$

$$\text{Khi đó } T = \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{x + y + xy}}{xy(x + y + 1)} \geq \frac{(x + y)^2\sqrt{x + y + xy}}{2xy(x + y + 1)}$$

$$\text{Đặt } S = x + y; P = xy \text{ vì } 0 < y \leq 1 \leq x \Rightarrow \begin{cases} S > 1 \\ (x-1)(y-1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < P \leq S - 1$$

$$\text{Đặt } f(P) = \frac{S^4(S + P)}{4P^2(S + 1)^2} \text{ ta có } f'(P) = -\frac{S^4(2S + P)}{4P^3(S + 1)^2} < 0, \forall P \in (0; S - 1]$$

Do đó $f(P)$ là hàm số nghịch biến trên $(0; S - 1]$

$$\Rightarrow f(P) \geq f(S - 1) = \frac{S^4(2S - 1)}{4(S^2 - 1)^2}, \forall P \in (0; S - 1]. \text{ Xét hàm số } g(S) = \frac{S^4(2S - 1)}{4(S^2 - 1)^2} \text{ với } S > 1$$

$$\text{Ta có } g'(S) = \frac{(S - 2)(S^2 + 2S - 1)S^3}{2(S^2 - 1)^3} \Rightarrow g'(S) = 0 \Leftrightarrow S = 2 \text{ (vì } S > 1).$$

$$\text{Từ bảng biến thiên suy ra } g(S) \geq g(2) = \frac{4}{3}, \forall S \in (1; +\infty)$$

$$\text{Do đó ta có } T \geq \sqrt{f(P)} \geq \sqrt{g(S)} \geq \sqrt{g(2)} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } \min T = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ giá trị nhỏ nhất đạt được khi } x = y = 1 \text{ hay } a = b = c$$

Bài 22: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{xy}{1 + z^2} + \frac{yz}{1 + x^2} - \frac{x^3y^3 + y^3z^3}{24x^3z^3}$$

Lời giải

Nhận xét: Bài 22 khi ta thay giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ vào biểu thức P thì P là một biểu thức đồng bậc. Tuy nhiên nếu chỉ sử dụng các biến đổi đại số thì ta vẫn chưa làm giảm số biến của biểu thức. Ta cần sử dụng các hệ quả để đánh giá biểu thức

$$\text{Ta có } \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} = \frac{xy}{(x^2+z^2)+(y^2+z^2)} + \frac{yz}{(x^2+y^2)+(x^2+z^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} \leq \frac{xy}{2\sqrt{(x^2+z^2)(y^2+z^2)}} + \frac{yz}{2\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}}$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{x^2+z^2} + \frac{y^2}{z^2+y^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{z^2}{x^2+z^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{y^2}{z^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} \right) \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{y^2}{2yz} + \frac{y^2}{2xy} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)$$

$$\text{Ta lại có } x^3y^3 + y^3z^3 \geq \frac{1}{4}(xy+yz)^3 \Rightarrow \frac{x^3y^3 + y^3z^3}{x^3z^3} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{(xy+yz)^3}{x^3z^3} = \frac{1}{4} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)^3$$

$$\text{Vậy } P \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right) - \frac{1}{96} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)^3. \text{ Đặt } t = \frac{y}{z} + \frac{y}{x} \Rightarrow t > 0 \text{ (vì } x, y, z > 0)$$

$$\text{Khi đó } P \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8}t - \frac{1}{96}t^3$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}t - \frac{1}{96}t^3 \text{ trên } (0; +\infty).$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{32}t^2 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (vì } t > 0)$$

$$\text{Lập bảng biến thiên suy ra } f(t) \leq f(2) = \frac{5}{12}, \forall t \in (0; +\infty) \text{ hay } P \leq f(t) \leq \frac{5}{12}$$

$$\text{Vậy } \text{Max} P = \frac{5}{12}, \text{ giá trị lớn nhất đạt được khi } x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bài 23: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + 2$

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: } P = \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{2z^2}{y^2+z^2} - \frac{3z}{2x+z}$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$\frac{x}{z} + 2 = \left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} \geq 2\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^4 \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^4} + \frac{z}{x} = 2\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \frac{z}{x} \Rightarrow \frac{x}{z} + 2 \geq 2\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \frac{z}{x}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{z} \Rightarrow t > 0 \text{ (vì } x, z > 0).$$

$$\text{Do đó } t + 2 \geq 2t^2 + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - 2t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)(2t-1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

$$\text{Ta có } P = \frac{2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} + \frac{2}{\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1} - \frac{3}{2\frac{x}{z} + 1}$$



Nhận xét: $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = \frac{x}{z}$ vì $\frac{x}{z} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \leq 1$. Mặt khác $x, y, z > 0 \Rightarrow \frac{x}{y}, \frac{y}{z} > 0$

$$\text{Do đó } \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1} \leq \frac{2}{1 + \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}} = \frac{2}{1 + \frac{x}{z}}$$

Vậy $P \leq \frac{4}{1 + \frac{x}{z}} - \frac{3}{2\frac{x}{z} + 1} = \frac{4}{1+t} - \frac{3}{2t+1}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{1+t} - \frac{3}{2t+1}$ trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{-10t^2 - 4t + 2}{(t+1)^2(2t+1)^2} < 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

Suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow f(t) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Hay $P \leq \frac{7}{6}$ với mọi $x, y, z > 0$ thỏa mãn $\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + 2$

Vậy $\text{Max} P = \frac{7}{6}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $\begin{cases} z = 2x \\ y = x\sqrt{2} \end{cases}$

N.C.Đ



CHỦ ĐỀ: ĐƯỜNG TIỆM CẬN

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 2

XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TIỆM CẬN CÓ CHỨA THAM SỐ

- Câu 1.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.
- A. $m = -1$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.
- Câu 2.** Có tất cả bao nhiêu giá trị khác nhau của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+mx+4}$ có hai đường tiệm cận?
- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.
- Câu 3.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng một đường tiệm cận?
- A. 0. B. 2. C. 1. D. Vô số.
- Câu 4.** Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận?
- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.
- Câu 5.** Cho hàm số $y = \frac{2x-m}{x+m}$. Với giá trị nào của m thì hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành hình vuông?
- A. $m = -2$. B. $m \neq 2$. C. $m = 2$. D. $m = \pm 2$.
- Câu 6.** Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?
- A. $2x+y=0$. B. $y=2x$. C. $x-2y=0$. D. $x+2y=0$.
- Câu 7.** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2019m$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2020m^4$ (với m là tham số thực). Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?
- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.
- Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2-2x+2m}{(x-1)(x+m)}$. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng?
- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.



Câu 9. Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+mx+4}$ có đúng 1 tiệm cận đứng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{mx+5}{x-1}$ (C_m). Tìm m để giao điểm của hai tiệm cận của (C_m) thuộc Parabol (P): $y = x^2 - 2x + 2019$.

- A. $m = 2022$. B. $m = 1$. C. $m = 2018$. D. $m = -2$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

- A. 8. B. 9. C. 12. D. 11.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{1}{[x^2-(2m+1)x+2m]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

- A. $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$. C. $m > 1$. D. $\begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{1-x}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

N.C.Đ

- A. $\begin{cases} m \neq \frac{5}{2} \\ m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$. C. $-2 < m < 2$. D. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.

Câu 14. Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

- A. 2007. B. 2010. C. 2009. D. 2008.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-2019;2019)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{4036x+2}{\sqrt{mx^2+3}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

- A. 0. B. 2018. C. 4036. D. 25.

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) có tiệm cận ngang và tồn tại tiếp tuyến của (C) song song và cách tiệm cận ngang của (C) một khoảng bằng 3. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a \in \left(\frac{1}{2};1\right)$. B. $a \in \left(1;\frac{3}{2}\right)$. C. $a \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$. D. $a \in \left(\frac{3}{2};2\right)$.



- Câu 17.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.
- A. $-1 \leq m < 0$. B. $-1 \leq m \leq 0$. C. $m < -1$. D. $m > 0$.
- Câu 18.** Cho hàm số $y = \frac{12 + \sqrt{4x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 6x + 2m}}$ có đồ thị (C_m) . Tìm tập S tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng.
- A. $S = [8; 9)$. B. $S = \left[4; \frac{9}{2}\right)$. C. $S = \left(4; \frac{9}{2}\right)$. D. $S = (0; 9]$.
- Câu 19.** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - mx - 3m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng là
- A. $(0; +\infty)$. B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$. D. $\left(0; \frac{1}{2}\right]$.
- Câu 20.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.
- A. $m < 0$. B. $m = 0$.
 C. $m > 0$. D. Không có giá trị thực của m
- Câu 21.** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} + mx$ có tiệm cận ngang. Tổng các phần tử của S là
- A. -2 . B. 2 . C. -3 . D. 3 .
- Câu 22.** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} - \frac{m}{2}x$ có tiệm cận ngang. Tích các phần tử của S là
- A. 8 . B. -84 . C. 21 . D. -21 .
- Câu 23.** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt{9x^2 - 5x + 3} - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} + mx$ có tiệm cận ngang. Tổng bình phương tất cả các phần tử của S là
- A. 10 . B. 15 . C. 50 . D. 51 .
- Câu 24.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+m-3}}{x+5}$ có đúng một đường tiệm cận?
- A. 5 . B. 4 . C. 1 . D. 6 .
- Câu 25.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x$. Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2019}{f(x) - m}$ có hai đường tiệm cận đứng.
- A. $m < 0$. B. $0 < m < 1$ C. $m > 0$. D. $m < 1$.



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

A. $m = -1$.B. $m = \frac{1}{2}$.C. $m = 2$.**D. $m = 1$.**

Lời giải

Ta có:

Tiệm cận ngang của hàm số $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ là:

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(m+1)x-5m}{2x-m} = \frac{m+1}{2} = 1 \Rightarrow m = 1.$$

Câu 2. Có tất cả bao nhiêu giá trị khác nhau của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+mx+4}$ có hai đường tiệm cận?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{m}{x} + \frac{4}{x^2}} = 0.$$

N.C.Đ

Nên đồ thị hàm số luôn có một đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Do đó để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận thì phương trình: $x^2 + mx + 4 = 0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} m^2 - 16 = 0 \\ m \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16 = 0 \\ m \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -4 \\ m = -5 \end{cases}$$

Vậy $m \in \{-4; 4; -5\}$. Nên có 3 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng một đường tiệm cận?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

$$\text{Kí hiệu (C) là đồ thị hàm số } y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}.$$

* Trường hợp 1: $m = 0$.

Khi đó $y = \frac{6x-3}{(-6x+3)(9x^2+1)}$. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang $y=0$.

Do đó chọn $m = 0$.

* Trường hợp 2: $m \neq 0$.

Xét phương trình $(mx^2 - 6x + 3)(9x^2 + 6mx + 1) = 0$ (1)

Nhận thấy: (C) luôn có một đường tiệm cận ngang $y = 0$ và phương trình (1) không thể có duy nhất một nghiệm đơn với mọi m .

Do đó (C) có đúng một đường tiệm cận khi và chỉ khi (C) không có tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow (1) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m < 0 \\ 9m^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -1 < m < 1 \end{cases}, \text{ (không tồn tại } m \text{)}.$$

Kết hợp các trường hợp ta được $m = 0$.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = m$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = m$ suy ra $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận thì đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} m - 1 = 0 \\ 4m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{4} \end{cases}$$

N.C.Đ

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{2x - m}{x + m}$. Với giá trị nào của m thì hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành hình vuông

A. $m = -2$.

B. $m \neq 2$.

C. $m = 2$.

D. $m = \pm 2$.

Lời giải

Với $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $d_1: x = -m$ và tiệm cận ngang $d_2: y = 2$.

Ta có $d_1 \cap Ox = A(-m; 0)$, $d_2 \cap Oy = B(0; 2)$.

Để hai đường tiệm cận cùng với 2 trục tọa độ tạo thành hình vuông thì tam giác OAB vuông cân tại O $\Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow |-m| = 2 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{mx + 1}{x - 2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?

A. $2x + y = 0$.

B. $y = 2x$.

C. $x - 2y = 0$.

D. $x + 2y = 0$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{mx + 1}{x - 2m}$ có tiệm cận đứng $x = 2m$; tiệm cận ngang $y = m$

$\Rightarrow$ Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $I(2m; m)$

$\Rightarrow x = 2y \Rightarrow x - 2y = 0$



Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2019m$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2020m^4$ (với m là tham số thực). Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Để hàm số có duy nhất một tiệm cận ngang điều kiện cần và đủ là

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \Rightarrow 2020m^4 = 2019m \Leftrightarrow m(2020m^3 - 2019) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{\frac{2019}{2020}} \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn để hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2m}{(x-1)(x+m)}$. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Đặt $g(x) = x^2 - 2x + 2m$.

Khi $m = -1$ ta có hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} = -\infty$ suy ra đồ thị

của hàm số đã cho có duy nhất một tiệm cận đứng $x = 1$.

Khi $m \neq -1$ xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2m}{(x-1)(x+m)}$

Trường hợp 1: Đồ thị hàm số đã cho có duy nhất một tiệm cận đứng $x = 1$.

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) \neq 0 \\ g(-m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2m \neq 0 \\ m^2 + 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ m = 0 \\ m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \end{cases}$$

Trường hợp 2: Đồ thị hàm số đã cho có duy nhất một tiệm cận đứng $x = m$.

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) = 0 \\ g(-m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m \neq 0 \\ -1 + 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -4 \\ m \neq 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Kết luận: Vậy có 4 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy đáp án là A.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 + mx + 4}$ có đúng 1 tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải**Chọn C**



Ta có: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

TH1: $x^2+mx+4=0$ có nghiệm kép. $\Leftrightarrow \Delta_m=0 \Leftrightarrow m^2-16=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-4 \\ m=4 \end{cases}$.

TH2: $x^2+mx+4=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm là $x=-1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_m > 0 \\ (-1)^2 - m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy có 3 giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+mx+4}$ có đúng 1 tiệm cận đứng.

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{mx+5}{x-1}$ (C_m). Tìm m để giao điểm của hai tiệm cận của (C_m) thuộc Parabol (P): $y = x^2 - 2x + 2019$.

A. $m = 2022$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2018$.

D. $m = -2$.

Lời giải

Để đồ thị hàm số có hai tiệm cận khi $m \neq -5$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=m$.

Giao điểm của hai tiệm cận là $I(1;m)$

Vì $I(1;m) \in (P): y = x^2 - 2x + 2019 \Leftrightarrow m = 1 - 2 + 2019$ nên $m = 2018$ (thỏa mãn).

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn

$[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 8.

B. 9.

C. 12.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m} = 0$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận

ngang là $y=0$.

Do đó (C) có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi (C) có 3 đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0(1)$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-m)(x^2-2mx+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=m \\ x^2-2mx+1=0 \end{cases}$.

$$\text{Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khác 3} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 1 > 0 \\ m^2 - 2m^2 + 1 \neq 0 \\ 3^2 - 6m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < -1 \\ m > 1 \\ m \neq \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty).$$

Do $m \in [-6; 6]$, m nguyên nên $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; 2; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 9 giá trị m thỏa mãn.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{1}{[x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

C. $m > 1$.

D. $\begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x > m \\ x^2 - (2m+1)x + 2m \neq 0 \end{cases}$ N.C.Đ.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{[x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m}} = 0$ nên đồ thị hàm số luôn có một đường tiệm cận ngang $y = 0$. Do đó để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có 3 đường tiệm cận đứng. Ta có $\lim_{x \rightarrow m^+} y = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = m$ làm đường tiệm cận đứng. Như vậy ta cần có phương trình

$$x^2 - (2m+1)x + 2m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn } m \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 2m \\ 1 > m \\ 2m > m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \end{cases}$$

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{1-x}{x^2 - 2mx + 4}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} m \neq \frac{5}{2} \\ m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$

C. $-2 < m < 2$.

D. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận thì đồ thị có hai đường tiệm cận đứng.

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ 1 - 2m + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Câu 14. Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m}$$
 có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2007.

B. 2010.

C. 2009.

D. 2008.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m}$.

+) TXĐ: $D = [3; +\infty)$

+) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^4}}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2}} = 0$. Do đó ĐTHS có 1 tiệm cận ngang $y = 0$.

+) Để ĐTHS có 2 đường tiệm cận thì phải có thêm 1 tiệm cận đứng. Vậy yêu cầu bài toán trở thành: Tìm điều kiện để phương trình $x^2 + x - m = 0$ phải có 1 nghiệm lớn hơn hoặc bằng 3.

Trường hợp 1: Phương trình $x^2 + x - m = 0$ phải có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 3 < x_2$.
 $\Leftrightarrow a.f(3) < 0 \Leftrightarrow 12 - m < 0 \Leftrightarrow m > 12$.

Trường hợp 2 : Phương trình $x^2 + x - m = 0$ có nghiệm $x = 3$ thì $m = 12$.

Với $m = 12$ phương trình trở thành: $x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \end{cases}$ (tmđk)

Trường hợp 3: Phương trình $x^2 + x - m = 0$ có nghiệm kép $x > 3$.

Khi $m = \frac{-1}{4}$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{-1}{2}$. (không thỏa mãn)

Theo đề bài $m \in [-2019; 2019]$, m nguyên do đó $m \in [12; 2019]$.

Vậy có $(2019 - 12) + 1 = 2008$ giá trị của m .

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-2019; 2019)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{4036x + 2}{\sqrt{mx^2 + 3}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. 0.

B. 2018.

C. 4036.

D. 25.

Lời giải

Chọn B

□ Với $m < 0$ ta có tập xác định của hàm số: $D = \left(-\sqrt{-\frac{3}{m}}; \sqrt{-\frac{3}{m}}\right)$ nên không

tồn tại tiệm cận ngang.

□ Với $m = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số cũng không có tiệm cận ngang.

□ Với $m > 0$ ta có tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(4036 + \frac{2}{x}\right)}{x \sqrt{m + \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4036 + \frac{2}{x}}{\sqrt{m + \frac{3}{x^2}}} = \frac{4036}{\sqrt{m}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(4036 + \frac{2}{x}\right)}{-x \sqrt{m + \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4036 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{m + \frac{3}{x^2}}} = -\frac{4036}{\sqrt{m}}$$

nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là $y = \pm \frac{4036}{\sqrt{m}}$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} m > 0 \\ m \in (-2019; 2019) \Leftrightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 2018\} \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy có 2018 giá trị nguyên của m .

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C) . Biết rằng (C) có tiệm cận ngang và tồn tại tiếp tuyến của (C) song song và cách tiệm cận ngang của (C) một khoảng bằng 3. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **B.** $a \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$. **C.** $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. **D.** $a \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Để đường cong (C) có tiệm cận ngang khi và chỉ khi: $a > 0$

Suy ra ta có hai đường tiệm cận ngang là: $y_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}; y_2 = -\frac{1}{\sqrt{a}}$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{\sqrt{ax^2+1} - (x+1) \cdot \frac{ax}{\sqrt{ax^2+1}}}{ax^2+1} = \frac{1-ax}{\sqrt{(ax^2+1)^3}}$$

Gọi tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm $M(x_M; y_M)$ là đường thẳng Δ

Ta có Δ song song tiệm ngang của (C) suy ra:

$$+) y'(x_M) = 0 \Rightarrow 1 - ax_M = 0 \Leftrightarrow x_M = \frac{1}{a} \Rightarrow M\left(\frac{1}{a}; \sqrt{1 + \frac{1}{a}}\right)$$

Ta có khoảng cách từ Δ đến tiệm cận ngang của (C) bằng 3

+) Khoảng cách từ Δ đến tiệm cận ngang cũng chính là khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận ngang.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} d(M; y_1) = 3 \\ d(M; y_2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left| \sqrt{1 + \frac{1}{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right| = 3 \\ \left| \sqrt{1 + \frac{1}{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{9}{16}. \text{ Vậy } a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x + 1}$ có đúng một đường tiệm cận.

A. $-1 \leq m < 0$.

B. $-1 \leq m \leq 0$.

C. $m < -1$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn A

+) Nếu $m \geq 0$ ta thấy $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x + 1} \right) = \pm\sqrt{m} \Rightarrow y = \pm\sqrt{m}$ là tiệm cận ngang.

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \left(\frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x + 1} \right) = \pm\infty \Rightarrow x = -1 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

N.C.Đ

Vậy $m \geq 0$ không thỏa mãn đề bài.

+) Nếu $m < 0$ ta có hàm số xác định trên $D = \left[\frac{-1}{\sqrt{-m}}; \frac{1}{\sqrt{-m}} \right]$ không phải là một khoảng vô cùng nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = -1$ khi $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \left(\frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x + 1} \right) = \pm\infty$.

$$\text{Khi đó } m \text{ phải thỏa mãn hệ } \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{-m}} \leq -1 \leq \frac{1}{\sqrt{-m}} \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 0.$$

Câu 18. Cho hàm số $y = \frac{12 + \sqrt{4x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 6x + 2m}}$ có đồ thị (C_m) . Tìm tập S tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $S = [8; 9)$.

B. $S = \left[4; \frac{9}{2} \right)$.

C. $S = \left(4; \frac{9}{2} \right)$.

D. $S = (0; 9]$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 4]$.



Dễ thấy $12 + \sqrt{4x - x^2} > 0, \forall x \in [0; 4]$.

Xét $g(x) = x^2 - 6x = -2m$ có $g'(x) = 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in (0; 4)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên đoạn $(0; 4)$:

x	0	3	4
g'	-	0	+
g	0	-9	-8

Từ đó ta thấy phương trình $x^2 - 6x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $(0; 4)$

khi $-9 < -2m < -8 \Leftrightarrow 4 < m < \frac{9}{2}$.

Câu 19. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - mx - 3m}}$ có

đúng hai tiệm cận đứng là

A. $(0; +\infty)$.

B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

C. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

D. $\left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy $1 + \sqrt{x+1} > 0, \forall x \geq -1$.

Hàm số có đúng hai tiệm cận đứng khi $x^2 - mx - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x > -1$.

Với $x \geq -1$, phương trình $x^2 - mx - 3m = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+3} = m$.

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x^2}{x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x+3) - x^2}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $[-1; +\infty)$:

x	-1	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$\frac{1}{2}$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta thấy để phương trình $x^2 - mx - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x > -1$ thì $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.



Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. $m < 0$.

B. $m = 0$.

C. $m > 0$.

D. Không có giá trị thực của m

Lời giải

Chọn C

Ta thấy khi $m \geq 0$ thì tập xác định của hàm số mới chứa ∞ .

Nếu $m = 0$ thì hàm số $y = x + 1$ không có đường tiệm cận ngang.

Nếu $m > 0$ thì ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\left(\frac{1}{x} + 1\right)}{|x|\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$, suy ra đồ thị hàm số có 2 tiệm cận

ngang là $y = \frac{1}{\sqrt{m}}, y = \frac{-1}{\sqrt{m}}$.

Câu 21. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} + mx$ có tiệm cận ngang. Tổng các phần tử của S là

A. -2.

B. 2.

C. -3.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} + mx \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - x + 2x - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} + (m-1)x \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - x \right) = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} \right) = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} + mx \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - x - 2x - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} + (m+3)x \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - x \right) = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} \right) = \frac{3}{4}$$

* Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hữu hạn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ m+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-3 \end{cases}$$

Câu 22. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} - \frac{m}{2}x$ có tiệm cận ngang. Tích các phần tử của S là

A. 8.

B. -84.

C. 21.

D. -21.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} - \frac{m}{2}x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - 2x + 5x - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} - \left(\frac{m}{2} + 3 \right)x \right) \end{aligned}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - 2x \right) = -\frac{5}{12}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5x - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} \right) = \frac{7}{10}$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} - \frac{m}{2}x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - 2x - 5x - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} + \left(7 - \frac{m}{2} \right)x \right) \end{aligned}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - 2x \right) = -\frac{5}{12}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5x - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} \right) = -\frac{7}{10}$

* Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hữu hạn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} + 3 = 0 \\ 7 - \frac{m}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 14 \end{cases}$$

Câu 23. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt{9x^2 - 5x + 3} - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} + mx$ có tiệm cận ngang. Tổng bình phương tất cả các phần tử của S là

A. 10.

B. 15.

C. 50.

D. 51.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 5x + 3} - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} + mx \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 5x + 3} - 3x + 4x - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} + (m-1)x \right) \end{aligned}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 5x + 3} - 3x \right) = \frac{-5}{6}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4x - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} \right) = -\frac{1}{16}$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 5x + 3} - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} + mx \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 5x + 3} + 3x + 4x - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} + (m-7)x \right) \end{aligned}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 5x + 3} - 3x \right) = \frac{5}{6}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4x - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} \right) = -\frac{1}{16}$

* Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hữu hạn $\Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ m-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=7 \end{cases}$

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+m}-3}{x+5}$ có đúng một đường tiệm cận?

A. 5.

B. 4.

C. 1.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y = \frac{\sqrt{x+m}-3}{x+5} = \frac{x+m-9}{(x+5)(\sqrt{x+m}+3)}.$$

Để thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \forall m$. Do đó đồ thị hàm số có một đường TCN là $y = 0$.

Để đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng ta xét thường hợp sau: -5 là nghiệm của tử hoặc -5 làm $\sqrt{x+m}$ không xác định.

TH1: -5 là nghiệm của tử thì $-5+m-9=0 \Leftrightarrow m=14$.

Thử lại:

$$\lim_{x \rightarrow -5} y = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+14-9}{(x+5)(\sqrt{x+14}+3)} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{\sqrt{x+14}+3} = \frac{1}{6}. \text{ Không có TCD.}$$

TH2: -5 làm $\sqrt{x+m}$ không xác định thì $-5 \notin [-m; +\infty) \Leftrightarrow -5 < -m \Leftrightarrow m < 5$.

Khi đó không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -5} y$ nên không đường tiệm cận đứng.

Mặt khác đề bài yêu cầu tìm giá trị nguyên dương của m nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy $m \in \{1; 2; 3; 4; 14\}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x$. Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm

số $g(x) = \frac{2019}{f(x)-m}$ có hai đường tiệm cận đứng.

A. $m < 0$.

B. $0 < m < 1$

C. $m > 0$.

D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \frac{1}{(1+\tan^2 x)^2}, \text{ suy ra } f(\tan x) = \frac{1}{(1+\tan^2 x)^2} \text{ hay } f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Yêu cầu bài toán tương đương tìm m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2019}{\frac{1}{(x^2+1)^2} - m}$ có hai

đường tiệm cận đứng tương đương phương trình $\frac{1}{(x^2+1)^2} - m = 0$ có hai nghiệm phân

biệt.

$$\text{Xét hàm số } h(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$h'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^3} \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	0	1	0

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $\frac{1}{(x^2+1)^2} - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$

N.C.Đ



CHỦ ĐỀ: ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 1

XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẰNG ĐỊNH NGHĨA

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y		2		3	5
		$\nearrow$		$\nearrow$	
			$+\infty$		

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 2. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x}-5}{x^2-x-6}$ là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$+$	$+$	$-$	
y		3	2		
		$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
			$+\infty$	$-\infty$	

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		2		3	5
		$\nearrow$		$\nearrow$	
			$+\infty$		

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?



x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$-$	0	$+$	$+$
y	-3	1	$+\infty$	$+\infty$	3

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 6. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
y	-1	2	-4	3	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Câu 7. Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{25-x^2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 2.

N.C.Đ

C. 3.

D. 4.

Câu 8. Số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Câu 9. Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x+1}$. Đồ thị hàm số có mấy đường tiệm cận?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 11. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 12. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^3-3x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Câu 13. Đồ thị hàm số $y = \frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x^2+3x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.



Câu 14. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sin x^2}{x^3}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 15. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2019}}{|x|-2019}$ là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0

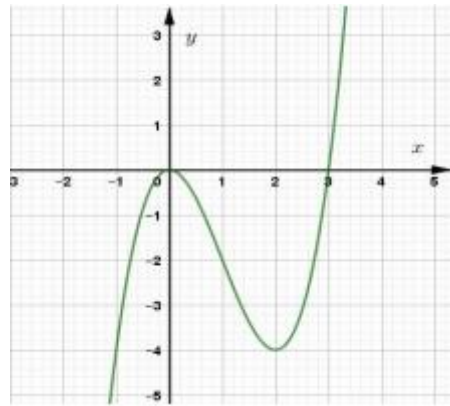
Câu 16. Đồ thị hàm số $y = \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 17. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x^2-2x+2)+5}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

- A. 2. B. 6. C. 4. D. 3.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		-	-	-	+
y	$+\infty$	2	1	-1	1

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x)-2}$ là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.



Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ là:

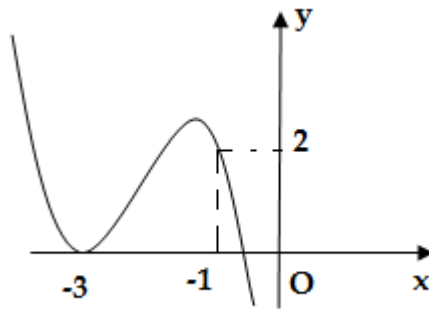
A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[(f(x))^2 - 2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 3.

B. 2.

N.C.Đ C. 6.

D. 4.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y	1	-3	1

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	2	-2	1	-3	$+\infty$



Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

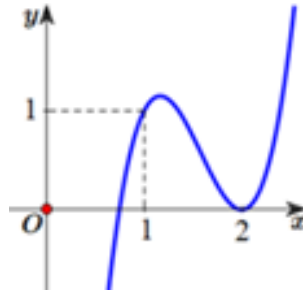
A. 5.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



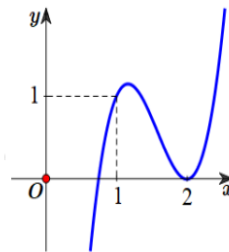
A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Câu 25. Cho hàm số bậc ba: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 5

B. 4

C. 6

D. 3



HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y		2		3	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là một tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 5 \Rightarrow y = 5$ là một tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là một tiệm cận đứng.

Vậy tổng số tiệm cận là 3. **Chọn C**

Câu 2. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x}-5}{x^2-x-6}$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x}-5}{x^2-x-6} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x}-5}{x^2-x-6} = +\infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng: $x = 3$.

Vậy số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là 1.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$+$	$+$	$-$	
y		3	2		

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 3$ suy ra $y = 3$ là tiệm cận ngang.



$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty$ suy ra $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ suy ra $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Vậy hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		2		3	
		$\nearrow$	$+\infty$		$\nearrow$
					5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Nhìn bảng biến thiên ta có:

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

+ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 5 \Rightarrow y = 5$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

+) $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$		$-$	$+$	$+$
y	-3	1	$+\infty$	$+\infty$	3
	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
			-2		$-\infty$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -3 \Rightarrow y = -3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3 \Rightarrow y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.



Ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 6. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'			$-$	$+$	$-$
y	-1	2	-4	3	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

+ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow y = -1$ là đường tiệm cận ngang.

+ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ là đường tiệm cận ngang.

+ $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -2$ là đường tiệm cận đứng.

+ Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 3 đường tiệm cận.

Câu 7. Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{25-x^2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = (-5; 5)$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang và tiệm cận xiên.

Vì $\lim_{x \rightarrow (-5)^+} \frac{x-1}{\sqrt{25-x^2}} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -5$ là tiệm cận đứng.

Vì $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x-1}{\sqrt{25-x^2}} = +\infty$ nên đường thẳng $x = 5$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Câu 8. Số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.



Ta có

$$\textcircled{\circ} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

$$\textcircled{\circ} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} y = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}} = +\infty \Rightarrow x = -2 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$$\textcircled{\circ} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}} = +\infty \Rightarrow x = 2 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

Vậy số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 3.

Câu 9. Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2; -2\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là đường tiệm cận ngang.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2^-} y = \frac{1}{4}.$$

N.C.Đ

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1}{x+2} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1}{x+2} = -\infty \Rightarrow x = -2 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x+1}$. Đồ thị hàm số có mấy đường tiệm cận?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Có $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ (loại) nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 \Rightarrow y = -1; y = 1$ là 2 đường tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 11. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = [-4; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

Ta có:



$$\begin{aligned}
 +) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+4-4}{(x^2+x)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+4}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 +) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+4-4}{(x^2+x)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+4}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$+) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x(x+1)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x(x+1)} = -\infty.$$

Nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Vậy đồ thị có 1 tiệm cận đứng.

Câu 12. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^3-3x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

N.C.B

Chọn A

Xét hàm số $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^3-3x}, (1).$

Tập xác định $D = [1; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty).$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x^3-3x} = +\infty$ nên $x = \sqrt{3}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (1).

Vậy đồ thị hàm số (1) có 1 tiệm cận đứng.

Câu 13. Đồ thị hàm số $y = \frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x^2+3x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

+) TXĐ: $D = (1; +\infty).$

Suy ra không tồn tại các giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-1)^{\pm}} y$ và $\lim_{x \rightarrow (-2)^{\pm}} y$ nên $x = -1; x = -2$ không là các đường tiệm cận đứng của đồ thị.

+) $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2+3x+2} = 0$, suy ra $x = 1$ không là đường tiệm cận đứng.



$$+) \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^6}}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y = 0$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x^2 + 3x + 2}$ có một đường tiệm cận.

Câu 14. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sin x^2}{x^3}$

là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = \frac{\sin x^2}{x^3}$.

+ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

+ Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \right) = +\infty$ N.C.Đ

Suy ra $x = 0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Lại có $\left| \frac{\sin(x^2)}{x^3} \right| \leq \frac{1}{|x|^3}, \forall x \neq 0$.

Mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|^3} = 0$ nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^3} = 0$. Tương tự ta cũng có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^3} = 0$.

Suy ra $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 15. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2019}}{|x|-2019}$ là

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2019}}{|x|-2019}$ (1). Điều kiện xác định: $\begin{cases} x > -2019 \\ x \neq 2019 \end{cases}$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2019}}{x-2019} = 0$ nên đồ thị hàm số (1) có 1 tiệm cận ngang là $y = 0$.



Ta có $\lim_{x \rightarrow 2019^+} y = \lim_{x \rightarrow 2019^+} \frac{\sqrt{x+2019}}{x-2019} = +\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = 2019$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (1).

Lại có: $\lim_{x \rightarrow -2019^+} y = \lim_{x \rightarrow -2019^+} \frac{\sqrt{x+2019}}{-x-2019} = \lim_{x \rightarrow -2019^+} \frac{-1}{\sqrt{x+2019}} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = -2019$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (1).

Vậy đồ thị hàm số (1) có 3 đường tiệm cận.

Câu 16. Đồ thị hàm số $y = \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(5 - \frac{8}{x}\right)}{x \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{8}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = 5 \Rightarrow y = 5$ là tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(5 - \frac{8}{x}\right)}{(-x) \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{8}{x} - 5}{\sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = -5 \Rightarrow y = -5$ là tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = -\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 3^+} y = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = +\infty \Rightarrow x = 3$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 17. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = [-16; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Xét $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+16}+4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = \frac{1}{8}$.

Suy ra đường thẳng $x = 0$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

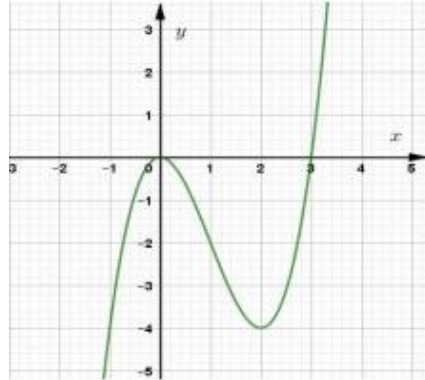


Xét $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho chỉ có một đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x^2-2x+2)+5}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 2.

B. 6.

C. 4.

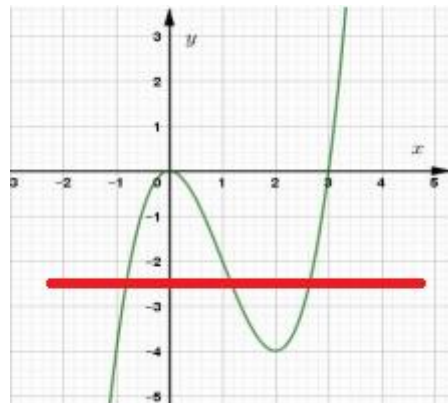
D. 3.

Lời giải

N.C.Đ

Chọn C

Số tiệm cận đứng là số nghiệm của phương trình $f(x^2-2x+2) = -\frac{5}{2}$.



Theo bảng ta có $2f(x)+5 = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ ($x_1 < 0$; $x_2, x_3 > 1$), $a \neq 0$.

Do $x^2-2x+2 = (x-1)^2+1 \geq 1$ nên $f(x^2-2x+2) = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{x_2-1}$; $x = 1 \pm \sqrt{x_3-1}$.

Vì phương trình $f(x^2-2x+2) = -\frac{5}{2}$ có 4 nghiệm nên đồ thị hàm số có 4 tiệm cận đứng.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	2	1	-1	1	

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x)-2}$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $3f(x)-2=0$ (hay $f(x)=\frac{2}{3}$) có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa $x_1 \in (-\infty; -1)$, $x_2 \in (-1; 0)$, $x_3 \in (0; 1)$, $x_4 \in (1; +\infty)$. Suy ra đồ thị hàm số

$y = \frac{2}{3f(x)-2}$ có 4 tiệm cận đứng là $x = x_1, x = x_2, x = x_3, x = x_4$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3f(x)-2} = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{2}{3f(x)-2}.$$

N.C.Đ

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3f(x)-2} = 2$ nên $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{2}{3f(x)-2}.$$

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x)-2}$ có 2 tiệm cận ngang là $y = 0, y = 2$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x)-2}$ là 6.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{f(x)-1} \text{ là:}$$

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)-1} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)-1} = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)-1} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)-1} = \infty$ (vì

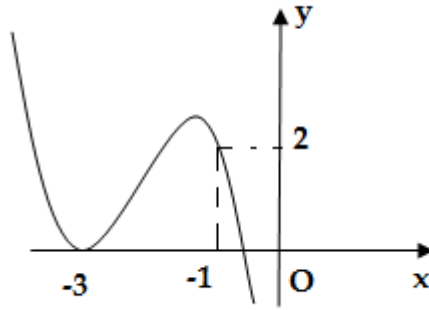
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$) nên $y = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang duy nhất.



Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)-1} = \infty$ (vì $f(x)=1 \Leftrightarrow x=0$) nên $x=0$ là tiệm cận đứng duy nhất.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[(f(x))^2 - 2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 3.

B. 2.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

N.C.Đ

$$\text{Điều kiện} \begin{cases} x \leq -1 \\ x > 0 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[(f(x))^2 - 2f(x)]} = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x[(f(x))^2 - 2f(x)]},$$

rõ ràng $x=0$ là một tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

$$\text{Xét phương trình } (f(x))^2 - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Với } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = x_1 \in (-1; 0) \end{cases} \text{ trong đó } x = -3 \text{ là nghiệm nghiệm kép, nên mẫu sẽ có}$$

nhân tử $(x+3)^2$ do đó $x = -3$ là một tiệm cận đứng.

$$\text{Với } f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = x_2 \in (-3; -1) \\ x = x_3 \in (-\infty; -1) \end{cases} \text{ , ba nghiệm này là nghiệm đơn, nên}$$

$f(x) - 2 = k(x+1)(x-x_2)(x-x_3)$, ta thấy trong $g(x)$ thì $(x+1)$ sẽ bị rút gọn nên có thêm $x = x_2 \in (-3; -1)$ và $x = x_3 \in (-\infty; -1)$ là tiệm cận đứng.



Vậy tóm lại đồ thị có 4 tiệm cận đứng là $x=0; x=-3; x=x_2; x=x_3$

Chọn D

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	1				1

Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ được vẽ dưới đây:

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 1$. Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ có 1 đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Ta có $2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ x=b \end{cases}$, trong đó $a > -\frac{1}{2}, b < -\frac{1}{2}$.

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{2f(x)-1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{2f(x)-1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{1}{2f(x)-1} = -\infty, \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{1}{2f(x)-1} = +\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ có 2 đường tiệm cận ngang là đường thẳng $x = a$ và đường thẳng $x = b$.

Kết luận: Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	2		1		$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ được vẽ dưới đây:

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

**A. 5.****B. 2.****C. 4.****D. 3.****Lời giải****Chọn A**

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) + 2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{Đồ thị hàm số } y = \frac{1}{f(x) + 2} \text{ có tiệm ngang là } y = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) + 2} = 0 \Rightarrow \text{Đồ thị hàm số } y = \frac{1}{f(x) + 2} \text{ có tiệm ngang là } y = 0.$$

$$\text{Xét phương trình } f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -2 \quad (1).$$

Dựa vào bảng biến thiên, (1) có 3 nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 \in (0; 2)$, $x_3 \in (2; +\infty)$.Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x) + 2}$ có 3 tiệm cận đứng là $x = -1$, $x = x_2$, $x = x_3$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 5 tiệm cận.

Câu 24. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2) \cdot \sqrt{x-1}}{x \cdot [f^2(x) - f(x)]} \text{ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?}$$

A. 5.**B. 4.****C. 6.****D. 3.****Lời giải****Chọn D**Điều kiện: $x \geq 1$

$$\text{Xét } f^2(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0(1) \\ f(x) = 1(2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = b \in (1; 2) \\ x = c > 2 \end{cases}$$

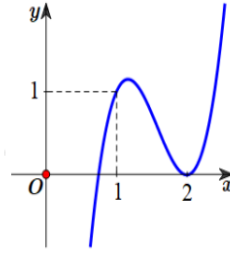
Vậy

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x-1)(x-2) \cdot \sqrt{x-1}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x)-1]} = \frac{(x-1)(x-2) \sqrt{x-1}}{x \cdot (x-a)(x-2)^2 (x-1)(x-b)(x-c)} \\ &= \frac{\sqrt{x-1}}{x \cdot (x-a)(x-2)(x-b) \cdot (x-c)} \end{aligned}$$



Do $x \geq 1$ nên đồ thị hàm số có 3 đường Tiệm Cận Đứng

Câu 25. Cho hàm số bậc ba: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 5

B. 4

C. 6

D. 3

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x \geq 1$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x) = a(x-a')(x-2)^2$ với $a' \in (0;1)$ và

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = b' \in (1;2) \\ x = c' > 2 \end{cases}$$

N.C.Đ

Do đó $f^2(x) - f(x) = a(x-a')(x-2)^2(x-1)(x-b')(x-c')$.

Do đó: $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{a^2(x+1)(x-a')(x-2)(x-b')(x-c')}$.

Do điều kiện $x \geq 1$ nên đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.



CHỦ ĐỀ: ĐƯỜNG TIỆM CẬN

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 2

XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TIỆM CẬN CÓ CHỨA THAM SỐ

- Câu 1.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.
- A. $m = -1$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.
- Câu 2.** Có tất cả bao nhiêu giá trị khác nhau của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+mx+4}$ có hai đường tiệm cận?
- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.
- Câu 3.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng một đường tiệm cận?
- A. 0. B. 2. C. 1. D. Vô số.
- Câu 4.** Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận?
- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.
- Câu 5.** Cho hàm số $y = \frac{2x-m}{x+m}$. Với giá trị nào của m thì hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành hình vuông?
- A. $m = -2$. B. $m \neq 2$. C. $m = 2$. D. $m = \pm 2$.
- Câu 6.** Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?
- A. $2x+y=0$. B. $y=2x$. C. $x-2y=0$. D. $x+2y=0$.
- Câu 7.** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2019m$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2020m^4$ (với m là tham số thực). Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?
- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.
- Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2-2x+2m}{(x-1)(x+m)}$. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng?
- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.



- Câu 9.** Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+mx+4}$ có đúng 1 tiệm cận đứng?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 10.** Cho hàm số $y = \frac{mx+5}{x-1}$ (C_m). Tìm m để giao điểm của hai tiệm cận của (C_m) thuộc Parabol (P): $y = x^2 - 2x + 2019$.
- A. $m = 2022$. B. $m = 1$. C. $m = 2018$. D. $m = -2$.
- Câu 11.** Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?
- A. 8. B. 9. C. 12. D. 11.
- Câu 12.** Cho hàm số $y = \frac{1}{[x^2-(2m+1)x+2m]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.
- A. $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$. C. $m > 1$. D. $\begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$.
- Câu 13.** Cho hàm số $y = \frac{1-x}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.
- A. $\begin{cases} m \neq \frac{5}{2} \\ m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$. C. $-2 < m < 2$. D. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.
- Câu 14.** Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.
- A. 2007. B. 2010. C. 2009. D. 2008.
- Câu 15.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-2019;2019)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{4036x+2}{\sqrt{mx^2+3}}$ có hai đường tiệm cận ngang.
- A. 0. B. 2018. C. 4036. D. 25.
- Câu 16.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) có tiệm cận ngang và tồn tại tiếp tuyến của (C) song song và cách tiệm cận ngang của (C) một khoảng bằng 3. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $a \in \left(\frac{1}{2};1\right)$. B. $a \in \left(1;\frac{3}{2}\right)$. C. $a \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$. D. $a \in \left(\frac{3}{2};2\right)$.



- Câu 17.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.
- A. $-1 \leq m < 0$. B. $-1 \leq m \leq 0$. C. $m < -1$. D. $m > 0$.
- Câu 18.** Cho hàm số $y = \frac{12 + \sqrt{4x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 6x + 2m}}$ có đồ thị (C_m) . Tìm tập S tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng.
- A. $S = [8; 9)$. B. $S = \left[4; \frac{9}{2}\right)$. C. $S = \left(4; \frac{9}{2}\right)$. D. $S = (0; 9]$.
- Câu 19.** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - mx - 3m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng là
- A. $(0; +\infty)$. B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$. D. $\left(0; \frac{1}{2}\right]$.
- Câu 20.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.
- A. $m < 0$. N.C.Đ B. $m = 0$.
C. $m > 0$. D. Không có giá trị thực của m
- Câu 21.** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} + mx$ có tiệm cận ngang. Tổng các phần tử của S là
- A. -2 . B. 2 . C. -3 . D. 3 .
- Câu 22.** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} - \frac{m}{2}x$ có tiệm cận ngang. Tích các phần tử của S là
- A. 8 . B. -84 . C. 21 . D. -21 .
- Câu 23.** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt{9x^2 - 5x + 3} - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} + mx$ có tiệm cận ngang. Tổng bình phương tất cả các phần tử của S là
- A. 10 . B. 15 . C. 50 . D. 51 .
- Câu 24.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+m}-3}{x+5}$ có đúng một đường tiệm cận?
- A. 5 . B. 4 . C. 1 . D. 6 .
- Câu 25.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x$. Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2019}{f(x) - m}$ có hai đường tiệm cận đứng.
- A. $m < 0$. B. $0 < m < 1$ C. $m > 0$. D. $m < 1$.



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

A. $m = -1$.B. $m = \frac{1}{2}$.C. $m = 2$.D. $m = 1$.

Lời giải

Ta có:

Tiệm cận ngang của hàm số $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ là:

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(m+1)x-5m}{2x-m} = \frac{m+1}{2} = 1 \Rightarrow m = 1.$$

Câu 2. Có tất cả bao nhiêu giá trị khác nhau của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+mx+4}$ có hai đường tiệm cận?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{m}{x} + \frac{4}{x^2}} = 0.$$

N.C.Đ

Nên đồ thị hàm số luôn có một đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Do đó để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận thì phương trình: $x^2 + mx + 4 = 0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} m^2 - 16 = 0 \\ m \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16 = 0 \\ m \neq -5 \\ m^2 - 16 > 0 \\ m = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -4 \\ m = -5 \end{cases}.$$

Vậy $m \in \{-4; 4; -5\}$. Nên có 3 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng một đường tiệm cận?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

$$\text{Kí hiệu (C) là đồ thị hàm số } y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}.$$

* Trường hợp 1: $m = 0$.

Khi đó $y = \frac{6x-3}{(-6x+3)(9x^2+1)}$. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang $y = 0$.



Do đó chọn $m = 0$.

* Trường hợp 2: $m \neq 0$.

Xét phương trình $(mx^2 - 6x + 3)(9x^2 + 6mx + 1) = 0$ (1)

Nhận thấy: (C) luôn có một đường tiệm cận ngang $y = 0$ và phương trình (1) không thể có duy nhất một nghiệm đơn với mọi m .

Do đó (C) có đúng một đường tiệm cận khi và chỉ khi (C) không có tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow (1) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m < 0 \\ 9m^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -1 < m < 1 \end{cases}, \text{ (không tồn tại } m \text{)}.$$

Kết hợp các trường hợp ta được $m = 0$.

- Câu 4.** Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận?
A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = m$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = m$ suy ra $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận thì đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} m - 1 = 0 \\ 4m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 5.** Cho hàm số $y = \frac{2x - m}{x + m}$. Với giá trị nào của m thì hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành hình vuông
A. $m = -2$. **B.** $m \neq 2$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = \pm 2$.

Lời giải

Với $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $d_1: x = -m$ và tiệm cận ngang $d_2: y = 2$.

Ta có $d_1 \cap Ox = A(-m; 0)$, $d_2 \cap Oy = B(0; 2)$.

Để hai đường tiệm cận cùng với 2 trục tọa độ tạo thành hình vuông thì tam giác OAB vuông cân tại $O \Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow |-m| = 2 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

- Câu 6.** Cho hàm số $y = \frac{mx + 1}{x - 2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?
A. $2x + y = 0$. **B.** $y = 2x$. **C.** $x - 2y = 0$. **D.** $x + 2y = 0$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{mx + 1}{x - 2m}$ có tiệm cận đứng $x = 2m$; tiệm cận ngang $y = m$



$\Rightarrow$ Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $I(2m; m)$

$$\Rightarrow x = 2y \Rightarrow x - 2y = 0$$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2019m$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2020m^4$ (với m là tham số thực). Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Để hàm số có duy nhất một tiệm cận ngang điều kiện cần và đủ là

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \Rightarrow 2020m^4 = 2019m \Leftrightarrow m(2020m^3 - 2019) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{\frac{2019}{2020}} \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn để hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2m}{(x-1)(x+m)}$. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

N.C.Đ

Đặt $g(x) = x^2 - 2x + 2m$.

Khi $m = -1$ ta có hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} = -\infty$ suy ra đồ

thị của hàm số đã cho có duy nhất một tiệm cận đứng $x = 1$.

Khi $m \neq -1$ xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2m}{(x-1)(x+m)}$

Trường hợp 1: Đồ thị hàm số đã cho có duy nhất một tiệm cận đứng $x = 1$.

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) \neq 0 \\ g(-m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2m \neq 0 \\ m^2 + 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ m = 0 \\ m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \end{cases}.$$

Trường hợp 2: Đồ thị hàm số đã cho có duy nhất một tiệm cận đứng $x = m$.

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) = 0 \\ g(-m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m \neq 0 \\ -1 + 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -4 \\ m \neq 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Kết luận: Vậy có 4 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy đáp án là A.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 + mx + 4}$ có đúng 1 tiệm cận đứng?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải**Chọn C**Ta có: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.TH1: $x^2+mx+4=0$ có nghiệm kép. $\Leftrightarrow \Delta_m=0 \Leftrightarrow m^2-16=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-4 \\ m=4 \end{cases}$.TH2: $x^2+mx+4=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm là $x=-1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_m > 0 \\ (-1)^2 - m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy có 3 giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+mx+4}$ có đúng 1 tiệm cận đứng.

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{mx+5}{x-1} (C_m)$. Tìm m để giao điểm của hai tiệm cận của (C_m) thuộc Parabol $(P): y = x^2 - 2x + 2019$.

A. $m = 2022$.B. $m = 1$.**C. $m = 2018$.**D. $m = -2$.**Lời giải**Để đồ thị hàm số có hai tiệm cận khi $m \neq -5$.Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=m$.Giao điểm của hai tiệm cận là $I(1;m)$ Vì $I(1;m) \in (P): y = x^2 - 2x + 2019 \Leftrightarrow m = 1 - 2 + 2019$ nên $m = 2018$ (thỏa mãn).

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 8.

B. 9.

C. 12.

D. 11.

Lời giải**Chọn B**Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$.Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m} = 0$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cậnngang là $y=0$.Do đó (C) có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi (C) có 3 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0(1)$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-m)(x^2 - 2mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - 2mx + 1 = 0 \end{cases}$.

$$\text{Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khác 3} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 1 > 0 \\ m^2 - 2m^2 + 1 \neq 0 \\ 3^2 - 6m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < -1 \\ m > 1 \\ m \neq \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty).$$

Do $m \in [-6; 6]$, m nguyên nên $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; 2; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 9 giá trị m thỏa mãn.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{1}{[x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

C. $m > 1$.

D. $\begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x > m \\ x^2 - (2m+1)x + 2m \neq 0 \end{cases}$.

N.C.Đ

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{[x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m}} = 0$ nên đồ thị hàm số luôn có một đường tiệm

cận ngang $y = 0$. Do đó để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có 3 đường tiệm cận đứng. Ta có $\lim_{x \rightarrow m^+} y = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng

$x = m$ làm đường tiệm cận đứng. Như vậy ta cần có phương trình

$$x^2 - (2m+1)x + 2m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn } m \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 2m \\ 1 > m \\ 2m > m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \end{cases}.$$

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{1-x}{x^2 - 2mx + 4}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} m \neq \frac{5}{2} \\ m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$

C. $-2 < m < 2$.

D. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.



Để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận thì đồ thị có hai đường tiệm cận đứng.

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x \neq 1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ 1 - 2m + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Câu 14. Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m} \text{ có đúng hai đường tiệm cận.}$$

A. 2007.

B. 2010.

C. 2009.

D. 2008.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m}.$$

$$+ \text{) TXĐ: } D = [3; +\infty)$$

$$+ \text{) } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^4}}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2}} = 0. \text{ Do đó ĐTHS có 1 tiệm cận ngang } y = 0.$$

+) Để ĐTHS có 2 đường tiệm cận thì phải có thêm 1 tiệm cận đứng. Vậy yêu cầu bài toán trở thành: Tìm điều kiện để phương trình $x^2 + x - m = 0$ phải có 1 nghiệm lớn hơn hoặc bằng 3.

Trường hợp 1: Phương trình $x^2 + x - m = 0$ phải có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 3 < x_2$.

$$\Leftrightarrow a \cdot f(3) < 0 \Leftrightarrow 12 - m < 0 \Leftrightarrow m > 12.$$

Trường hợp 2 : Phương trình $x^2 + x - m = 0$ có nghiệm $x = 3$ thì $m = 12$.

$$\text{Với } m = 12 \text{ phương trình trở thành: } x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \end{cases} \text{ (tmđk)}$$

Trường hợp 3: Phương trình $x^2 + x - m = 0$ có nghiệm kép $x > 3$.

$$\text{Khi } m = \frac{-1}{4} \text{ thì phương trình có nghiệm } x = \frac{-1}{2}. \text{ (không thỏa mãn)}$$

Theo đề bài $m \in [-2019; 2019]$, m nguyên do đó $m \in [12; 2019]$.

Vậy có $(2019 - 12) + 1 = 2008$ giá trị của m .

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-2019; 2019)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{4036x + 2}{\sqrt{mx^2 + 3}}$ có

hai đường tiệm cận ngang.

A. 0.

B. 2018.

C. 4036.

D. 25.

Lời giải

Chọn B

□ Với $m < 0$ ta có tập xác định của hàm số: $D = \left(-\sqrt{-\frac{3}{m}}; \sqrt{-\frac{3}{m}}\right)$ nên không tồn tại tiệm cận ngang.

□ Với $m = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số cũng không có tiệm cận ngang.

□ Với $m > 0$ ta có tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(4036 + \frac{2}{x}\right)}{x \sqrt{m + \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4036 + \frac{2}{x}}{\sqrt{m + \frac{3}{x^2}}} = \frac{4036}{\sqrt{m}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(4036 + \frac{2}{x}\right)}{-x \sqrt{m + \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4036 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{m + \frac{3}{x^2}}} = -\frac{4036}{\sqrt{m}}$$

nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là $y = \pm \frac{4036}{\sqrt{m}}$.

Suy ra $\begin{cases} m > 0 \\ m \in (-2019; 2019) \Leftrightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 2018\} \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ N.C.Đ

Vậy có 2018 giá trị nguyên của m .

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) có tiệm cận ngang và tồn tại tiếp tuyến của (C) song song và cách tiệm cận ngang của (C) một khoảng bằng 3. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

B. $a \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

C. $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

D. $a \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Để đường cong (C) có tiệm cận ngang khi và chỉ khi: $a > 0$

Suy ra ta có hai đường tiệm cận ngang là: $y_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}; y_2 = -\frac{1}{\sqrt{a}}$

Ta có: $y' = \frac{\sqrt{ax^2+1} - (x+1) \cdot \frac{ax}{\sqrt{ax^2+1}}}{ax^2+1} = \frac{1-ax}{\sqrt{(ax^2+1)^3}}$

Gọi tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm $M(x_M; y_M)$ là đường thẳng Δ

Ta có Δ song song tiệm ngang của (C) suy ra:



$$+) y'(x_M) = 0 \Rightarrow 1 - ax_M = 0 \Leftrightarrow x_M = \frac{1}{a} \Rightarrow M\left(\frac{1}{a}; \sqrt{1 + \frac{1}{a}}\right)$$

Ta có khoảng cách từ Δ đến tiệm cận ngang của (C) bằng 3

+) Khoảng cách từ Δ đến tiệm cận ngang cũng chính là khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận ngang.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} d(M; y_1) = 3 \\ d(M; y_2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left| \sqrt{1 + \frac{1}{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right| = 3 \\ \left| \sqrt{1 + \frac{1}{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{9}{16}. \text{ Vậy } a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x + 1}$ có đúng một đường tiệm cận.

A. $-1 \leq m < 0$.

B. $-1 \leq m \leq 0$.

C. $m < -1$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn A

+) Nếu $m \geq 0$ ta thấy $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x + 1} \right) = \pm\sqrt{m} \Rightarrow y = \pm\sqrt{m}$ là tiệm cận ngang.

N.C.Đ

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x + 1} \right) = \pm\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

Vậy $m \geq 0$ không thỏa mãn đề bài.

+) Nếu $m < 0$ ta có hàm số xác định trên $D = \left[\frac{-1}{\sqrt{-m}}; \frac{1}{\sqrt{-m}} \right]$ không phải là một khoảng vô cùng nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = -1$ khi $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x + 1} \right) = \pm\infty$.

Khi đó m phải thỏa mãn hệ $\begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{-m}} \leq -1 \leq \frac{1}{\sqrt{-m}} \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 0$.

Câu 18. Cho hàm số $y = \frac{12 + \sqrt{4x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 6x + 2m}}$ có đồ thị (C_m) . Tìm tập S tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $S = [8; 9)$.

B. $S = \left[4; \frac{9}{2} \right)$.

C. $S = \left(4; \frac{9}{2} \right)$.

D. $S = (0; 9]$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 4]$.



Dễ thấy $12 + \sqrt{4x - x^2} > 0, \forall x \in [0; 4]$.

Xét $g(x) = x^2 - 6x = -2m$ có $g'(x) = 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in (0; 4)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên đoạn $(0; 4)$:

x	0	3	4
g'	-	0	+
g	0	-9	-8

Từ đó ta thấy phương trình $x^2 - 6x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $(0; 4)$

khi $-9 < -2m < -8 \Leftrightarrow 4 < m < \frac{9}{2}$.

Câu 19. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - mx - 3m}}$ có

đúng hai tiệm cận đứng là

A. $(0; +\infty)$.

B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

N.C.Đ

C. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

D. $\left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy $1 + \sqrt{x+1} > 0, \forall x \geq -1$.

Hàm số có đúng hai tiệm cận đứng khi $x^2 - mx - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x > -1$.

Với $x \geq -1$, phương trình $x^2 - mx - 3m = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+3} = m$.

Đặt $f(x) = \frac{x^2}{x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x+3) - x^2}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $[-1; +\infty)$:

x	-1	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$\frac{1}{2}$	0	$+\infty$



Từ bảng biến thiên trên ta thấy để phương trình $x^2 - mx - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x > -1$ thì $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. $m < 0$.

B. $m = 0$.

C. $m > 0$.

D. Không có giá trị thực của m

Lời giải

Chọn C

Ta thấy khi $m \geq 0$ thì tập xác định của hàm số mới chứa ∞ .

Nếu $m = 0$ thì hàm số $y = x + 1$ không có đường tiệm cận ngang.

Nếu $m > 0$ thì ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\left(\frac{1}{x} + 1\right)}{|x|\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$, suy ra đồ thị hàm số có 2 tiệm cận

ngang là $y = \frac{1}{\sqrt{m}}, y = -\frac{1}{\sqrt{m}}$.

Câu 21. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} + mx$ có tiệm cận ngang. Tổng các phần tử của S là

A. -2 .

B. 2 .

C. -3 .

D. 3 .

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} + mx \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - x + 2x - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} + (m-1)x \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - x \right) = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} \right) = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} + mx \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - x - 2x - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} + (m+3)x \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - x \right) = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} \right) = \frac{3}{4}$$

* Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hữu hạn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ m+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-3 \end{cases}$$

Câu 22. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} - \frac{m}{2}x$ có tiệm cận ngang. Tích các phần tử của S là



A. 8.

B. -84.

C. 21.

D. -21.

Lời giải**Chọn B**

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} - \frac{m}{2}x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - 2x + 5x - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} - \left(\frac{m}{2} + 3 \right)x \right)$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - 2x \right) = -\frac{5}{12}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5x - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} \right) = \frac{7}{10}$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} - \frac{m}{2}x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - 2x - 5x - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} + \left(7 - \frac{m}{2} \right)x \right)$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 - 2} - 2x \right) = -\frac{5}{12}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5x - \sqrt{25x^2 - 7x + 2} \right) = -\frac{7}{10}$$

* Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hữu hạn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} + 3 = 0 \\ 7 - \frac{m}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 14 \end{cases}$$

N.C.Đ

Câu 23. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt{9x^2 - 5x + 3} - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} + mx$ có tiệm cận ngang. Tổng bình phương tất cả các phần tử của S là

A. 10.

B. 15.

C. 50.

D. 51.

Lời giải**Chọn C**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 5x + 3} - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} + mx \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 5x + 3} - 3x + 4x - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} + (m-1)x \right)$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 5x + 3} - 3x \right) = \frac{-5}{6}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4x - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} \right) = -\frac{1}{16}$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 5x + 3} - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} + mx \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 5x + 3} + 3x + 4x - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} + (m-7)x \right)$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 5x + 3} - 3x \right) = \frac{5}{6}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4x - \sqrt[3]{64x^3 + 3x^2 - 5x + 2} \right) = -\frac{1}{16}$$



* Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hữu hạn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ m-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=7 \end{cases}$$

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+m}-3}{x+5}$ có đúng một đường tiệm cận?

A. 5.

B. 4.

C. 1.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y = \frac{\sqrt{x+m}-3}{x+5} = \frac{x+m-9}{(x+5)(\sqrt{x+m}+3)}.$$

Để thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \forall m$. Do đó đồ thị hàm số có một đường TCN là $y = 0$.

Để đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng ta xét thường hợp sau: -5 là nghiệm của tử hoặc -5 làm $\sqrt{x+m}$ không xác định.

TH1: -5 là nghiệm của tử thì $-5+m-9=0 \Leftrightarrow m=14$.

Thử lại:

$$\lim_{x \rightarrow -5} y = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+14-9}{(x+5)(\sqrt{x+14}+3)} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{\sqrt{x+14}+3} = \frac{1}{6}. \text{ Không có TCD.}$$

TH2: -5 làm $\sqrt{x+m}$ không xác định thì $-5 \notin [-m; +\infty) \Leftrightarrow -5 < -m \Leftrightarrow m < 5$.

Khi đó không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -5} y$ nên không đường tiệm cận đứng.

Mặt khác đề bài yêu cầu tìm giá trị nguyên dương của m nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy $m \in \{1; 2; 3; 4; 14\}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x$. Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2019}{f(x)-m}$ có hai đường tiệm cận đứng.

A. $m < 0$.

B. $0 < m < 1$

C. $m > 0$.

D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \frac{1}{(1+\tan^2 x)^2}, \text{ suy ra } f(\tan x) = \frac{1}{(1+\tan^2 x)^2} \text{ hay } f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$



Yêu cầu bài toán tương đương tìm m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2019}{\frac{1}{(x^2+1)^2} - m}$ có hai

đường tiệm cận đứng tương đương phương trình $\frac{1}{(x^2+1)^2} - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $h(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

$$h'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^3} \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	0	1	0

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $\frac{1}{(x^2+1)^2} - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$



CHỦ ĐỀ: ĐƯỜNG TIỆM CẬN

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 3

CÁC BÀI TOÁN KHÁC LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG TIỆM CẬN

- Câu 1:** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Số điểm thuộc đồ thị (C) cách đều hai tiệm cận của đồ thị (C) là
- A. 2. B. 4. C. 0. D. 1.
- Câu 2:** Hai tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-4}$ cắt hai trục tọa độ tại các điểm A, B . Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là
- A. $R = 4$. B. $R = 5$. C. $R = \frac{5}{2}$. D. $R = 3$.
- Câu 3:** Khoảng cách giữa hai tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2-3}$ bằng
- A. $\sqrt{3}$. B. 3. C. $2\sqrt{3}$. D. 6.
- Câu 4:** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C) . Tiếp tuyến của (C) cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B . Giá trị nhỏ nhất của chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB bằng
- A. $4\sqrt{2}\pi$. B. 8π . C. 2π . D. 4π .
- Câu 5:** Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x-2}$ có đồ thị là (C) , M là điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 2\sqrt{5}$. Gọi S là tổng các hoành độ của tất cả các điểm M thỏa mãn bài toán. Tìm giá trị của S .
- A. 6. B. 5. C. 8. D. 7.
- Câu 6:** Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) , gọi d là tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của (C) tại điểm $A(x_1; y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của (C) tại điểm $B(x_2; y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2 + y_1 = -5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .
- A. 0. B. 4. C. 10. D. 9.



- Câu 7:** Cho hàm số $y = \frac{1-3x}{3-x}$ có đồ thị (C) . Điểm M có hoành độ dương nằm trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng gấp hai lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của (C) . Khoảng cách từ M đến tâm đối xứng của (C) bằng
- A. $3\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{5}$. C. 4 D. 5
- Câu 8:** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (C) . Tìm tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận nhỏ nhất.
- A. $M(0; -1)$. B. $M(2; 2)$. C. $M(4; 3)$. D. $M(1; -3)$.
- Câu 9:** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C) . Giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là
- A. $3\sqrt{3}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{2}$.
- Câu 10:** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C) , gọi I là tâm đối xứng của đồ thị (C) và $M(a; b)$ là một điểm thuộc đồ thị. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt hai tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại hai điểm A và B . Để tam giác IAB có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất thì tổng $a+b$ bằng bao nhiêu?
- A. -3. B. 1. C. 3. D. 5.
- Câu 11:** Cho hàm số $y = \frac{4x-3}{x-3}$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) có hai điểm M, N thỏa mãn tổng khoảng cách từ M hoặc N đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất. Khi đó MN có giá trị bằng
- A. $MN = 4\sqrt{2}$. B. $MN = 6$. C. $MN = 4\sqrt{3}$. D. $MN = 6\sqrt{2}$.
- Câu 12:** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C) , I là giao điểm các đường tiệm cận của (C) . Gọi M là điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai đường tiệm cận tại A và B thỏa mãn chu vi tam giác IAB là nhỏ nhất. Khi đó có mấy điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán?
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 13:** Cho M là điểm có hoành độ dương thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$, sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là nhỏ nhất. Tọa độ điểm M là:
- A. $(4; 3)$. B. $(0; -1)$. C. $(1; -3)$. D. $(3; 5)$.
- Câu 14:** Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x+3} + ax + b}{(x-1)^2}$ có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị hàm số (C) không có tiệm cận đứng. Tính giá trị $T = 2a - 3b$.



A. $-\frac{11}{4}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{19}{4}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tổng khoảng cách từ gốc tọa độ đến tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \log_2 \frac{2x+3}{x-1}$ bằng

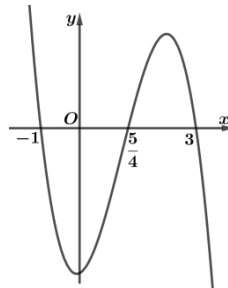
A. 2.

B. 3.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Câu 16. Cho hàm số $g(x) = \frac{2018}{h(x) - m^2 - m}$ với $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$ ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là 2

A. 11.

B. 10.

N.C.Đ

C. 9.

D. 20.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x+a}{x-a}$ có đồ thị (C) (với a là số thực dương). Gọi P, Q là 2 điểm phân biệt nằm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ P tới hai đường tiệm cận của (C) là nhỏ nhất và tổng khoảng cách từ Q tới hai đường tiệm cận của (C) là nhỏ nhất. Độ dài đoạn thẳng PQ là

A. $2\sqrt{2a+1}$.

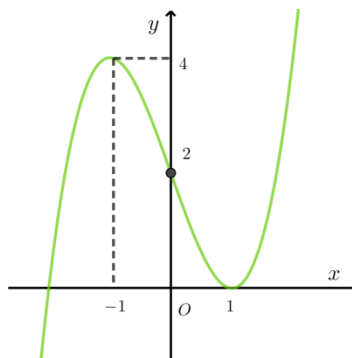
B. $2\sqrt{a}$.

C. $\sqrt{2a+1}$.

D. $4\sqrt{a}$.

Câu 18. Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm như hình vẽ dưới đây. Đặt

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}, \text{ hỏi đồ thị hàm số } y = g(x) \text{ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?}$$



A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2.



Câu 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ và $(x+1)^2 + y^2 = 1$. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ đi qua tâm của (C_1) , đi qua tâm của (C_2) và có các đường tiệm cận tiếp xúc với cả (C_1) và (C_2) . Tổng $a+b+c$ là

A. 8.

B. 2.

C. -1.

D. 5.

N.C.Đ



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Số điểm thuộc đồ thị (C) cách đều hai tiệm cận của đồ thị (C) là

A. 2.**B.** 4.**C.** 0.**D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x=1$, đường tiệm cận ngang $y=1$.

Gọi $M\left(x; \frac{x+1}{x-1}\right) \in (C)$ với $x \neq 1$ cách đều hai đường tiệm cận. Ta có

$$d(M, Ox) = d(M, Oy) \Leftrightarrow |x-1| = \left| \frac{x+1}{x-1} - 1 \right|$$

$$\Leftrightarrow |x-1| = \frac{2}{|x-1|} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Cả hai giá trị này đều thỏa mãn đề bài. Vậy có 2 điểm thỏa mãn đề bài.

Câu 2: Hai tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-4}$ cắt hai trục tọa độ tại các điểm A, B. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là

A. $R = 4$.**B.** $R = 5$.**C.** $R = \frac{5}{2}$.**D.** $R = 3$.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=4$, đường tiệm cận ngang $y=3$.

Do đó tọa độ các điểm A, B là $A(4;0)$, $B(0;3)$.

Tam giác OAB vuông tại O nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}.$$

Câu 3: Khoảng cách giữa hai tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2-3}$ bằng

A. $\sqrt{3}$.**B.** 3.**C.** $2\sqrt{3}$.**D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2-3}$ có tiệm cận đứng $x = \sqrt{3}$ và $x = -\sqrt{3}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng $x = \sqrt{3}$ và $x = -\sqrt{3}$ bằng $2\sqrt{3}$.

Vậy khoảng cách giữa hai tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2-3}$ bằng $2\sqrt{3}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C) . Tiếp tuyến của (C) cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B . Giá trị nhỏ nhất của chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB bằng

A. $4\sqrt{2}\pi$.

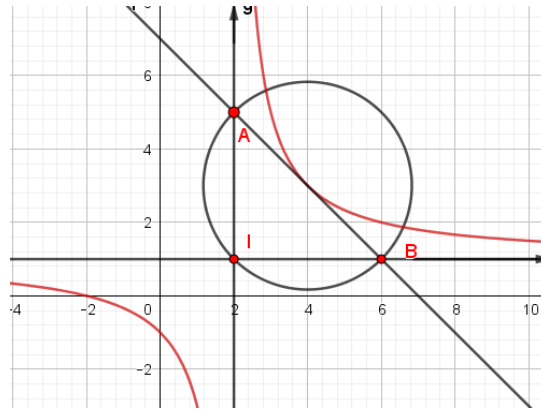
B. 8π .

C. 2π .

D. 4π .

Lời giải

Chọn A



Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $y' = \frac{-4}{(x-2)^2}$.

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$, suy ra $I(2;1)$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C) có dạng $y = \frac{-4}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{x_0+2}{x_0-2}$.

Tiếp tuyến d của (C) cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B nên

$$A\left(2; \frac{x_0+1}{x_0-2}\right), B(2x_0-2; 1).$$

Do tam giác IAB vuông tại I nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R = \frac{AB}{2}$.

Chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB là $P = AB \cdot \pi$.

Chu vi bé nhất khi AB nhỏ nhất

$$\text{Ta có } \overline{AB} = \left(4 - 2x_0; \frac{8}{x_0 - 2}\right)$$

$$\text{Suy ra } AB = \sqrt{4(2-x_0)^2 + \left(\frac{8}{x_0-2}\right)^2} = \sqrt{4(x_0-2)^2 + \left(\frac{8}{x_0-2}\right)^2} \geq \sqrt{2\sqrt{4 \cdot 64}} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 4\sqrt{2} \cdot \pi.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x-2}$ có đồ thị là (C) , M là điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 2\sqrt{5}$. Gọi S là tổng các hoành độ của tất cả các điểm M thỏa mãn bài toán. Tìm giá trị của S .



A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 7.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $y' = \frac{-2}{(x-2)^2}$.

Đồ thị (C) có hai đường tiệm cận là $x = 2$ và $y = 2$.

Gọi $M\left(m; \frac{2m-2}{m-2}\right) \in (C) (m \neq 2)$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại M là $y = \frac{-2}{(m-2)^2}(x-m) + \frac{2m-2}{m-2}$.

(C) cắt hai đường tiệm cận tại các điểm $A\left(2; \frac{2m}{m-2}\right)$ và $B(2m-2; 2)$.

Theo giả thiết $AB = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (2m-4)^2 + \frac{16}{(m-2)^2} = 20$

$$\Leftrightarrow (m-2)^4 - 5(m-2)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 = 1 \\ (m-2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \\ m = 4 \\ m = 0 \end{cases}$$

N.C.Đ

Vậy $S = 8$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C), gọi d là tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của (C) tại điểm $A(x_1; y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của (C) tại điểm $B(x_2; y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2 + y_1 = -5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

A. 0.

B. 4.

C. 10.

D. 9.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$.

Với $x = m-2 \Rightarrow y = 1 - \frac{3}{m} : A\left(m-2; 1 - \frac{3}{m}\right) (m \neq 0)$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C): $y = \frac{3}{m^2}(x-m+2) + 1 - \frac{3}{m}$.

Đồ thị (C) có tiệm cận ngang $y = 1$ và tiệm cận đứng $x = -2$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = \frac{3}{m^2}(x-m+2)+1-\frac{3}{m} \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1-\frac{6}{m} \\ x = -2 \end{cases}$ nên

$$y_1 = 1 - \frac{6}{m}.$$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = \frac{3}{m^2}(x-m+2)+1-\frac{3}{m} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2m-2 \end{cases}$ nên

$$x_2 = 2m-2.$$

$$\text{Suy ra } x_2 + y_1 = 2m - \frac{6}{m} - 1 = -5 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Vậy tổng bình phương các phần tử của S là $1^2 + (-3)^2 = 10$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{1-3x}{3-x}$ có đồ thị (C). Điểm M có hoành độ dương nằm trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng gấp hai lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của (C). Khoảng cách từ M đến tâm đối xứng của (C) bằng

A. $3\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{5}$.

C. 4

D. 5

Lời giải

Chọn B

Giả sử $M\left(t; \frac{3t-1}{t-3}\right) \in (C) \quad (t > 0, t \neq 3)$.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $d_1: x = 3$ và tiệm cận ngang $d_2: y = 3$.

Đồ thị (C) có tâm đối xứng $I(3; 3)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } d(M; d_1) = 2d(M; d_2) &\Leftrightarrow |t-3| = 2\left|\frac{3t-1}{t-3} - 3\right| \\ &\Leftrightarrow |t-3| = 2\left|\frac{8}{t-3}\right| \Leftrightarrow (t-3)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 7 \\ t = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có $t = 7$

$$\text{Với } t = 7 \Rightarrow M(7; 5) \Rightarrow \overline{IM} = (4; 2) \Rightarrow IM = 2\sqrt{5}.$$

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận nhỏ nhất.

A. $M(0; -1)$.

B. $M(2; 2)$.

C. $M(4; 3)$.

D. $M(1; -3)$.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị (C) có tiệm cận ngang là $d_1: y = 1 \Leftrightarrow y - 1 = 0$

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $d_2: x = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0$



Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0+2}{x_0-2}\right) \in (C), (x_0 \neq 2; x_0 > 0)$, ta có tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là

$$\begin{aligned} d &= d(M, d_1) + d(M, d_2) = \left| \frac{x_0+2}{x_0-2} - 1 \right| + |x_0 - 2| \\ &= \frac{4}{|x_0-2|} + |x_0-2| \geq 2\sqrt{\frac{4}{|x_0-2|} \cdot |x_0-2|} = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{4}{|x_0-2|} = |x_0-2| \Leftrightarrow |x_0-2|^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-2=2 \\ x_0-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=4(N) \\ x_0=0(L) \end{cases}$$

Vậy tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận nhỏ nhất bằng 4 khi $M(4;3)$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C) . Giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là

A. $3\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$. Giao điểm hai tiệm cận của đồ thị hàm số là $I(-1;1)$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A\left(a; \frac{a+2}{a+1}\right) \in (C)$ là:

$$y = \frac{-1}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{a+2}{a+1} \Leftrightarrow x + (a+1)^2 y - a^2 - 4a - 2 = 0.$$

$$\text{Khoảng cách từ } I(-1;1) \text{ đến tiếp tuyến là: } d = \frac{|-1 + (a+1)^2 \cdot 1 - a^2 - 4a - 2|}{\sqrt{1 + (a+1)^4}} = \frac{|-2a - 2|}{\sqrt{1 + (a+1)^4}}.$$

$$\text{Vì } \sqrt{1 + (a+1)^4} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} \sqrt{2 \cdot (a+1)^2} = \sqrt{2}|a+1| \text{ nên } d \leq \frac{2|a+1|}{\sqrt{2}|a+1|} = \sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=0$ hoặc $a=-2$.

Vậy giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là $\sqrt{2}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C) , gọi I là tâm đối xứng của đồ thị (C) và $M(a;b)$ là một điểm thuộc đồ thị. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt hai tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại hai điểm A và B . Để tam giác IAB có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất thì tổng $a+b$ bằng bao nhiêu?

A. -3.

B. 1.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B



Ta có $I(-1; 2); M\left(a; \frac{2a+1}{a+1}\right). y'(a) = \frac{1}{(a+1)^2}.$

Phương trình tiếp tuyến tại $M: y = \frac{1}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{2a+1}{a+1}.$

Giao của tiếp tuyến và tiệm cận đứng $A\left(-1; \frac{2a}{a+1}\right).$

Giao của tiếp tuyến và tiệm cận ngang $B(2a+1; 2).$

Ta có $IA = \frac{2}{|a+1|}; IB = 2|a+1| \Rightarrow S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = 2 = p \cdot r.$

với $p = IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB} = 2\sqrt{4} + \sqrt{2 \cdot 4}.$

Suy ra $r_{\max}$ khi $p_{\min}$. Khi đó $IA = IB.$

Suy ra M là giao điểm của đường thẳng d đi qua I có hệ số góc $k = -1$ và đồ thị hàm số.

Phương trình qua d có dạng: $y - 2 = -1(x + 1) \Leftrightarrow y = -x + 1.$

Hoàn thành giao điểm của d và đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$-x + 1 = \frac{2x+1}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(0; 1) \\ M(-2; 3) \end{cases} \Rightarrow a + b = 1. \quad \text{N.C.Đ}$$

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{4x-3}{x-3}$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) có hai điểm M, N thỏa mãn tổng khoảng cách từ M hoặc N đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất. Khi đó MN có giá trị bằng

- A. $MN = 4\sqrt{2}.$ B. $MN = 6.$ C. $MN = 4\sqrt{3}.$ **D. $MN = 6\sqrt{2}.$**

Lời giải

Chọn D

$$M \in (C) \Rightarrow M\left(m; \frac{4m-3}{m-3}\right), m \neq 3$$

$$\text{Tiệm cận đứng } \Delta_1: x - 3 = 0 \Rightarrow d(M, \Delta_1) = |m - 3|$$

$$\text{Tiệm cận ngang } \Delta_2: y - 4 = 0 \Rightarrow d(M, \Delta_2) = \left| \frac{4m-3}{m-3} - 4 \right| = \frac{9}{|m-3|}$$

$$\Rightarrow d(M, \Delta_1) + d(M, \Delta_2) = |m - 3| + \frac{9}{|m - 3|} \geq 6$$

$$\Rightarrow (d(M, \Delta_1) + d(M, \Delta_2))_{\min} = 6 \text{ đạt được khi } |m - 3| = \frac{9}{|m - 3|}$$

$$\Leftrightarrow (m - 3)^2 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 6 \end{cases}$$

Với $m = 0$ ta có $M(0; 1)$

Với $m = 6$ ta có $N(6; 7) \Rightarrow MN = 6\sqrt{2}.$

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C) , I là giao điểm các đường tiệm cận của (C) .

Gọi M là điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai đường tiệm cận tại A và B thỏa mãn chu vi tam giác IAB là nhỏ nhất. Khi đó có mấy điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Giao điểm hai đường tiệm cận của (C) là $I(1;2)$.

Giả sử $M\left(m; 2 + \frac{3}{m-1}\right) \in (C)$, $m \neq 1$, ta có $y'(m) = \frac{-3}{(m-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là: $(\Delta): y = \frac{-3}{(m-1)^2}(x-m) + 2 + \frac{3}{m-1}$.

Tọa độ giao điểm A, B của (Δ) với các đường tiệm cận là: $A\left(1; 2 + \frac{6}{m-1}\right)$ và $B(2m-1; 2)$.

Ta thấy $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{|m-1|} \cdot 2|m-1| = 2 \cdot 3 = 6$ (Đvdt).

Như vậy tam giác IAB vuông tại I và có diện tích không đổi nên chu vi tam giác này

nhỏ nhất khi $IA = IB \Leftrightarrow \frac{6}{|m-1|} = 2|m-1| \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{3} \\ m = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$.

Kết luận: Có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13. Cho M là điểm có hoành độ dương thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$, sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là nhỏ nhất. Tọa độ điểm M là:

A. $(4; 3)$.

B. $(0; -1)$.

C. $(1; -3)$.

D. $(3; 5)$.

Lời giải

Chọn A

Vì M là điểm có hoành độ dương thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ nên $M\left(a; \frac{a+2}{a-2}\right)$ (với $a > 0$).

Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là: $\Delta_1: x = 2$ và $\Delta_2: y = 1$

Suy ra: $d_1 = d_{(M; \Delta_1)} = |a-2|$ và $d_2 = d_{(M; \Delta_2)} = \left| \frac{a+2}{a-2} - 1 \right| = \left| \frac{4}{a-2} \right| = \frac{4}{|a-2|}$.

Vậy tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là:

$d = d_1 + d_2 = |a-2| + \frac{4}{|a-2|} \geq 2\sqrt{|a-2| \cdot \frac{4}{|a-2|}} = 4$.



Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $|a-2| + \frac{4}{|a-2|} \geq 2\sqrt{|a-2|\frac{4}{|a-2|}} = 4$.

Dấu bằng xảy ra khi: $|a-2| = \frac{4}{|a-2|} \Leftrightarrow (a-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=2 \\ a-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=0 \end{cases}$.

Mà $a > 0 \Rightarrow a = 4$. Vậy $M(4;3)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x+3} + ax + b}{(x-1)^2}$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị hàm số (C) không có tiệm cận đứng. Tính giá trị $T = 2a - 3b$.

A. $-\frac{11}{4}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{19}{4}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = \sqrt{x+3} + ax + b \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + a$.

Để đồ thị hàm số (C) không có tiệm cận đứng thì $f(x) = \sqrt{x+3} + ax + b = (x-1)^2 \cdot g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + a + b = 0 \\ \frac{1}{4} + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = -\frac{7}{4} \end{cases} \text{ N.C.Đ}$$

Vậy $T = 2a - 3b = \frac{19}{4}$.

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tổng khoảng cách từ gốc tọa độ đến tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \log_2 \frac{2x+3}{x-1}$ bằng

A. 2.

B. 3.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\frac{2x+3}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases}$

Ta xét:

☐ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\log_2 \frac{2x+3}{x-1} \right) = +\infty$

☐ $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^-} \left(\log_2 \frac{2x+3}{x-1} \right) = -\infty$



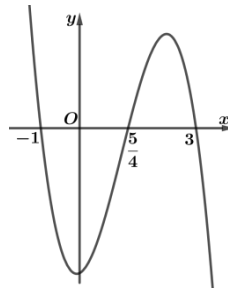
Từ đó suy ra tiệm cận đứng là $(d_1): x = -\frac{3}{2}; (d_2): x = 1$

$$\square \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log_2 \frac{2x+3}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\log_2 \frac{2x+3}{x-1} \right) = 1$$

Từ đó suy ra tiệm cận ngang là $(d_3): y = 1$

$$\text{Ta có: } T = d(O, d_1) + d(O, d_2) + d(O, d_3) = \frac{7}{2}$$

Câu 16. Cho hàm số $g(x) = \frac{2018}{h(x) - m^2 - m}$ với $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$ ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là 2

A. 11.

B. 10.

N.C.Đ C. 9.

D. 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$. Từ đồ thị ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = 3 \end{cases}$ và $(m < 0)$.

$$\text{Suy ra } h'(x) = 4m(x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m.$$

$$\text{Suy ra } h(x) = mx^4 - \frac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx + C. \text{ Từ đề bài ta có } C = 0.$$

$$\text{Vậy } h(x) = mx^4 - \frac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx.$$

$$\text{Xét } h(x) - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 13x^2 - 2x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{4}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{35}{3}$	$\frac{7807}{768}$	-1	$+\infty$

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x) - m^2 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m < 0$ ta có $-\frac{35}{3} < m < -1$.

Do m nguyên nên $m \in \{-11; -10; \dots; -2\}$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x+a}{x-a}$ có đồ thị (C) (với a là số thực dương). Gọi P, Q là 2 điểm phân biệt nằm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ P tới hai đường tiệm cận của (C) là nhỏ nhất và tổng khoảng cách từ Q tới hai đường tiệm cận của (C) là nhỏ nhất. Độ dài đoạn thẳng PQ là

A. $2\sqrt{2a+1}$.

B. $2\sqrt{a}$.

C. $\sqrt{2a+1}$.

D. $4\sqrt{a}$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số (C) có 2 đường tiệm cận là: TCN $\Delta_1: y = 1$ và TCĐ $\Delta_2: x = a$.

Gọi $P\left(m; \frac{m+a}{m-a}\right), Q\left(n; \frac{n+a}{n-a}\right) \in (C), m \neq n, m \neq a, n \neq a$.

Ta có

$$*) d(P, \Delta_1) + d(P, \Delta_2) = |m-a| + \left| \frac{m+a}{m-a} - 1 \right| = |m-a| + \left| \frac{2a}{m-a} \right| \geq 2\sqrt{|m-a| \cdot \left| \frac{2a}{m-a} \right|} = 2\sqrt{2a}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow |m-a| = \left| \frac{2a}{m-a} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} m = a + \sqrt{2a} \Rightarrow P(a + \sqrt{2a}; \sqrt{2a} + 1) \\ m = a - \sqrt{2a} \Rightarrow P(a - \sqrt{2a}; 1 - \sqrt{2a}) \end{cases}$$

$$*) d(Q, \Delta_1) + d(Q, \Delta_2) = |n-a| + \left| \frac{n+a}{n-a} - 1 \right| = |n-a| + \left| \frac{2a}{n-a} \right| \geq 2\sqrt{|n-a| \cdot \left| \frac{2a}{n-a} \right|} = 2\sqrt{2a}$$

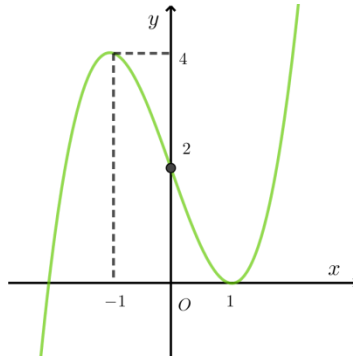
$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow |n-a| = \left| \frac{2a}{n-a} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} n = a + \sqrt{2a} \Rightarrow Q(a + \sqrt{2a}; \sqrt{2a} + 1) \\ n = a - \sqrt{2a} \Rightarrow Q(a - \sqrt{2a}; 1 - \sqrt{2a}) \end{cases}$$

Vì P, Q là 2 điểm phân biệt nên ta chọn $P(a + \sqrt{2a}; \sqrt{2a} + 1); Q(a - \sqrt{2a}; 1 - \sqrt{2a})$.

Do vậy $PQ = \sqrt{16a} = 4\sqrt{a}$.



Câu 18. Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm như hình vẽ dưới đây. Đặt $g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}$, hỏi đồ thị hàm số $y = g(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



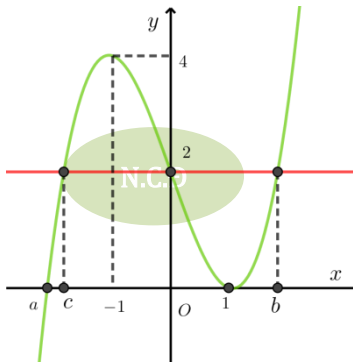
A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Xét $h(x) = x^2 - x = x(x-1)$ có hai nghiệm đơn là $x=0$ và $x=1$.

Xét $k(x) = f^2(x) - 2f(x)$, ta có $k(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$.

Ta có $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm như hình vẽ nên:

☐ $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x = a < -1$ (nghiệm đơn) và $x = 1$ (nghiệm kép).

☐ $f(x) = 2$ có ba nghiệm đơn $x = c \in (a; -1)$, $x = 0$ và $x = b > 1$.

Như vậy, ta thấy:

☐ Hàm số $y = g(x)$ có nghiệm đơn $x = 0$ ở mẫu sẽ triệt tiêu với ở trên tử nên mất.

☐ Nghiệm kép $x = 1$ ở mẫu và trong khi ở tử thì có $x = 1$ là nghiệm đơn, do đó không triệt tiêu hết, $x = 1$ vẫn là một tiệm cận đứng của hàm số $y = g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng là $x = a$, $x = b$, $x = c$ và $x = 1$.

Câu 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ và $(x+1)^2 + y^2 = 1$. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ đi



qua tâm của (C_1) , đi qua tâm của (C_2) và có các đường tiệm cận tiếp xúc với cả (C_1) và (C_2) . Tổng $a+b+c$ là

A. 8.

B. 2.

C. -1.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;2)$ và bán kính $R_1=1$.

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1;0)$ và bán kính $R_2=1$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có tiệm cận đứng $d_1: x = -c$, tiệm cận ngang $d_2: y = a$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ đi qua tâm $I_1(1;2)$, đi qua tâm $I_2(-1;0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{1+c} = 2 \\ \frac{-a+b}{-1+c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 2c+2 \\ a = b \end{cases} (*)$$

Vì hai đường tròn (C_1) và (C_2) cùng tiếp xúc với hai đường tiệm cận của đồ thị hàm

số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ nên

$$\begin{cases} d(I_1; d_1) = d(I_2; d_1) = 1 \\ d(I_1; d_2) = d(I_2; d_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |1+c| = |-1+c| = 1 \\ |2-a| = |-a| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=0 \end{cases} \text{ N.C.Đ. Từ (*) suy ra } b=1.$$

Vậy $a+b+c = 1+1+0 = 2$.



N.C.Đ



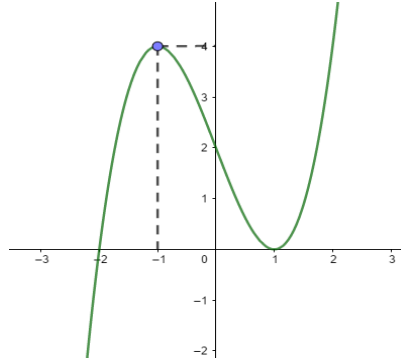
CHỦ ĐỀ: ĐỒ THỊ HÀM SỐ

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 1

ĐỒ THỊ HÀM SỐ VÀ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

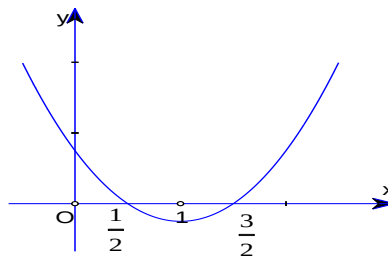
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x) - 2017 - 2018x + 2019$ là

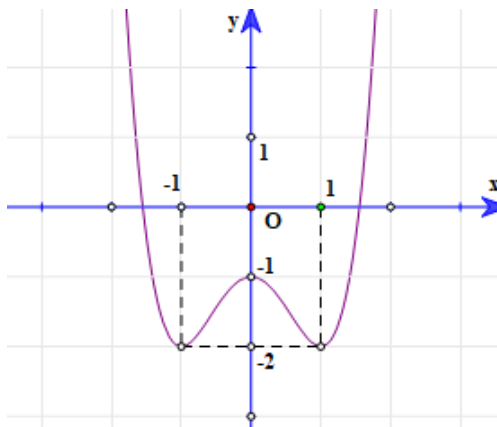
- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Giá trị của $\frac{c}{b}$ là



- A. $-\frac{1}{3}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{3}{4}$.

Câu 3. Cho $f(x) = (x-1)^2 - 2x$. Đồ thị hình bên dưới là của hàm số có công thức





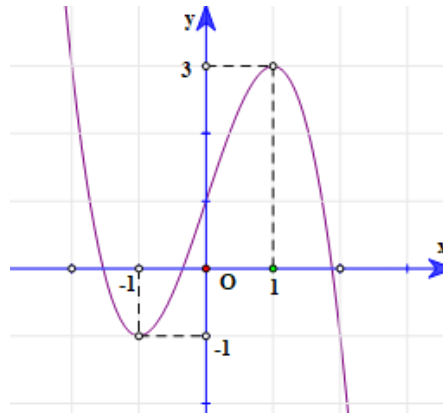
A. $y = -f(x^2 + 1) - 1.$

B. $y = -f(x^2 + 1) + 1.$

C. $y = f(x^2 + 1) - 1.$

D. $y = f(x^2 + 1) + 1.$

Câu 4. Cho $f(x) = (x-1)^3 - 3x + 3$. Đồ thị hình bên dưới là của hàm số có công thức



A. $y = -f(x+1) - 1.$

B. $y = -f(x+1) + 1.$

C. $y = -f(x-1) - 1.$

D. $y = -f(x-1) + 1.$

Câu 5. Cho bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'		-	-	+
y	-1	$+\infty$	0	1

Arrows indicate the flow of the function: from -1 down to $-\infty$, from $+\infty$ down to 0 , and from 0 up to 1 . A green oval labeled "N.C.Đ" is placed around the 0 in the y row.

Bảng biến thiên trên là của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

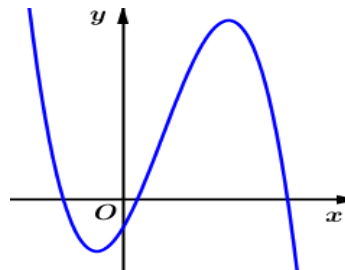
A. $y = \frac{|x|}{x+1}.$

B. $y = \frac{1}{x(x+1)}.$

C. $y = \frac{x}{|x+1|}.$

D. $y = |x|(x+1).$

Câu 6. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các giá trị a, b, c, d có bao nhiêu giá trị âm?



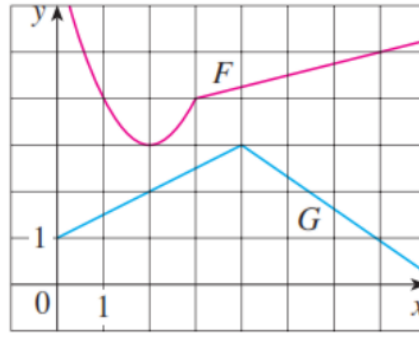
A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Câu 7. Cho $y = F(x)$ và $y = G(x)$ là những hàm số có đồ thị cho trong hình bên dưới, đặt $P(x) = F(x)G(x)$. Tính $P'(2)$.



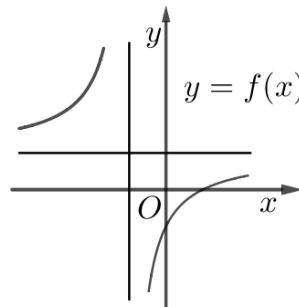
A. $\frac{3}{2}$.

B. 4.

C. 6.

D. $\frac{5}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ và $ad-bc \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ.



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

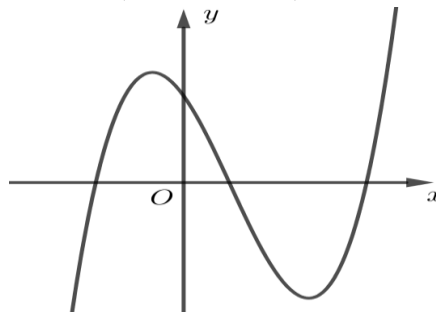
A. $ad < 0, ab > 0$.

B. $bd > 0, ad < 0$.

C. $ad > 0, ab < 0$.

D. $ab < 0, ad < 0$.

Câu 9. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây đúng?

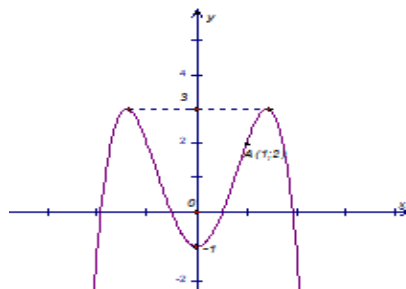
A. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

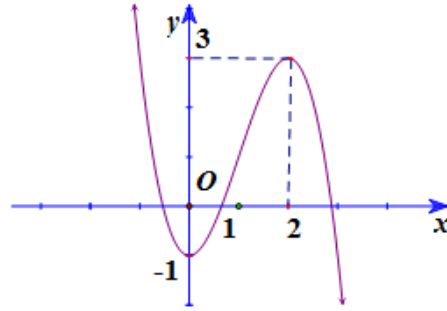
Câu 10. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$. Giá trị của biểu thức $M = a^2 + b^2 + c^2$ có thể nhận giá trị nào trong các giá trị sau





A. $M = 18$. B. $M = 6$. C. $M = 20$. D. $M = 24$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2f(|x|) - m = 0$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt.

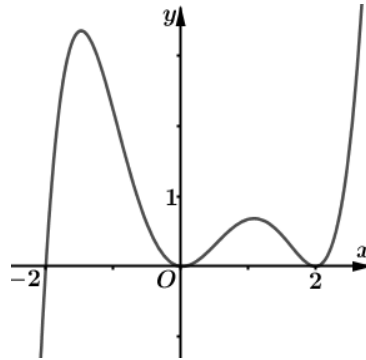


A. $1 < m < 3$. B. $-1 < m < 3$. C. $-2 < m < 6$. D. $2 < m < 6$.

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên nhỏ hơn 2019 của m để hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ có 5 điểm cực trị trên $\mathbb{R}$?

A. 2017. B. 2018. C. 2019. D. Đáp số khác.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), hình vẽ bên. Gọi hàm $g(x) = f[f(x)]$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

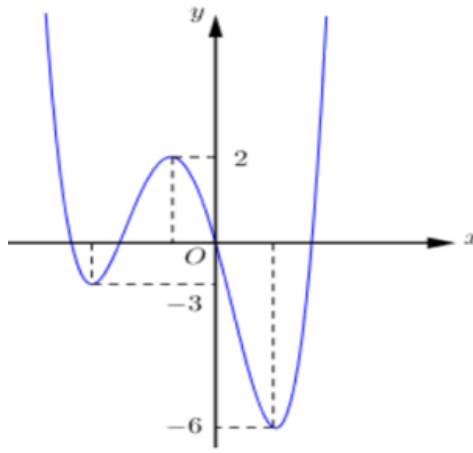


A. 10. B. 12. C. 8. D. 14.

Câu 14. hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị.

A. $\frac{5}{4} \leq m \leq 2$. B. $-\frac{5}{4} < m < 2$. C. $-2 < m < \frac{5}{4}$. D. $\frac{5}{4} < m < 2$.

Câu 15. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên không âm của tham số m để hàm số $y = |f(x-2019) + m - 2|$ có 5 cực trị. Số các phần tử của S bằng



- A. 3. B. 4. C. 2. D. 5.

Câu 16. Xét các số thực $c > b > a > 0$. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(|x^3|)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ là

x	$-\infty$	0	a	b	c	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

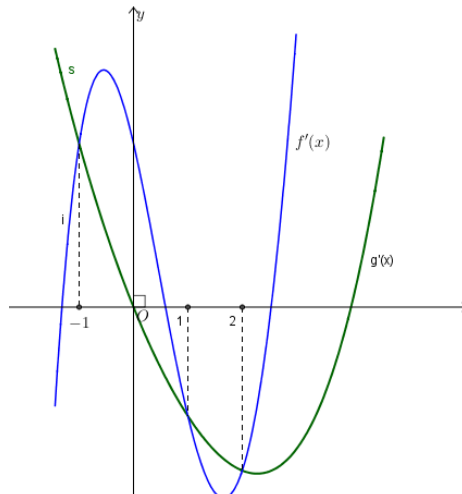
- A. 3. B. 7. C. 4. D. 5.

Câu 17. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c < -1 \\ 4a-2b+c > 8 \\ bc < 0 \end{cases}$. Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Số điểm

cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$ lớn nhất có thể có là

- A. 2. B. 12. C. 5. D. 7.

Câu 18. Cho các hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ và $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($m, n, p, q, r, a, b, c, d \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $f(0) = g(0)$. Các hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

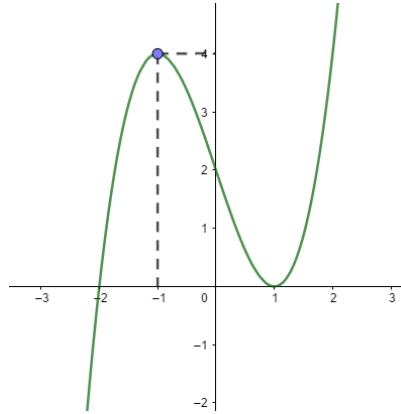


Tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ có số phần tử là

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

HƯỚNG DẪN VÀ GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x - 2017) - 2018x + 2019$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

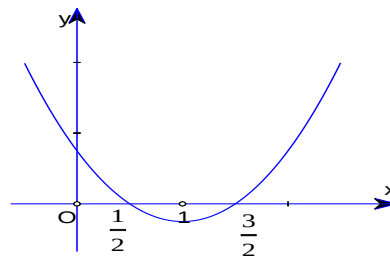
Ta có: $g(x) = f(x - 2017) - 2018x + 2019$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(x - 2017) - 2018$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x - 2017) = 2018 \quad (*) \quad \text{N.C.Đ}$$

Nhận xét: tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x)$ sang bên phải theo phương của trục hoành 2017 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f'(x - 2017)$. Do đó, số nghiệm của phương trình $f'(x) = 2018$ bằng số nghiệm của phương trình (*). Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình (*) có nghiệm đơn duy nhất hay hàm số đã cho có duy nhất 1 điểm cực trị.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Giá trị của $\frac{c}{b}$ là



A. $-\frac{1}{3}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{3}{4}$.

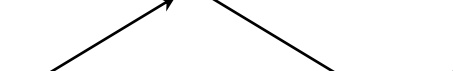
Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm cấp 1 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

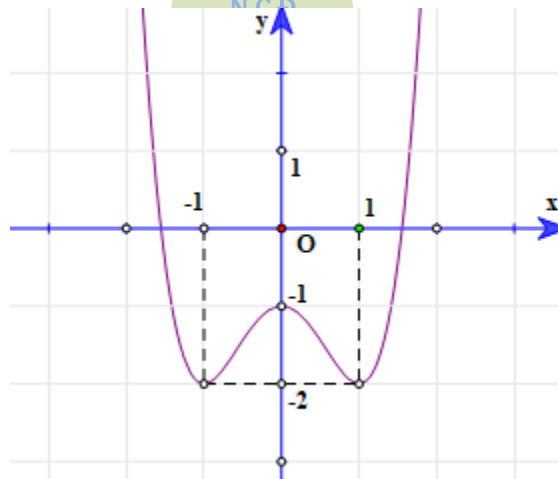
Ta có $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3a}{4} + b + c$ và $f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27a}{4} + 3b + c$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases} 3a + 4b + 4c = 0 \\ 27a + 12b + 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27a + 36b + 36c = 0 \\ 27a + 12b + 4c = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 24b + 32c = 0 \Rightarrow \frac{c}{b} = -\frac{3}{4}$.

Vậy $\frac{c}{b} = -\frac{3}{4}$.

Câu 3. Cho $f(x) = (x-1)^2 - 2x$. Đồ thị hình bên dưới là của hàm số có công thức



A. $y = -f(x^2 + 1) - 1$.

B. $y = -f(x^2 + 1) + 1$.

C. $y = f(x^2 + 1) - 1$.

D. $y = f(x^2 + 1) + 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta thử với từng đáp án:

+) Đáp án A: $y(0) = -f(1) - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$ loại.

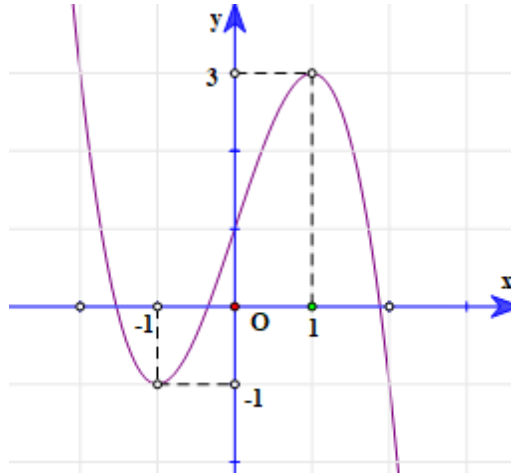
+) Đáp án B: $y(0) = -f(1) + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow$ loại.

+) Đáp án C: $y(0) = f(1) - 1 = -2 - 1 = -3 \Rightarrow$ loại.

+) Đáp án D: $y(0) = f(1) + 1 = -2 + 1 = -1 \Rightarrow$ thỏa mãn.



Câu 4. Cho $f(x) = (x-1)^3 - 3x + 3$. Đồ thị hình bên dưới là của hàm số có công thức



A. $y = -f(x+1) - 1$.

B. $y = -f(x+1) + 1$.

C. $y = -f(x-1) - 1$.

D. $y = -f(x-1) + 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta thử với từng đáp án:

+) Đáp án A: $y(-1) = -f(0) - 1 = -2 - 1 = -3 \Rightarrow$ loại.

+) Đáp án B: $y(-1) = -f(0) + 1 = -2 + 1 = -1 \Rightarrow$ thỏa mãn.

+) Đáp án C: $y(-1) = -f(-2) - 1 = 18 - 1 = 17 \Rightarrow$ loại.

+) Đáp án D: $y(-1) = -f(-2) + 1 = 18 + 1 = 19 \Rightarrow$ loại.

Câu 5. Cho bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'		-	-	+
y	-1	$+\infty$	0	1

Bảng biến thiên trên là của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

A. $y = \frac{|x|}{x+1}$.

B. $y = \frac{1}{x(x+1)}$.

C. $y = \frac{x}{|x+1|}$.

D. $y = |x|(x+1)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào BBT, suy ra:

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -1 \Rightarrow$ Loại đáp án D.

Đồ thị hàm số có các đường tiệm cận ngang là $y = \pm 1 \Rightarrow$ Loại đáp án B.

Hàm số không có đạo hàm tại $x = 0 \Rightarrow$ Loại đáp án C.

Xét đáp án A ta có:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty$, suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{1+\frac{1}{x}} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Suy ra đồ thị hàm số có các đường tiệm cận ngang là $y = \pm 1$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

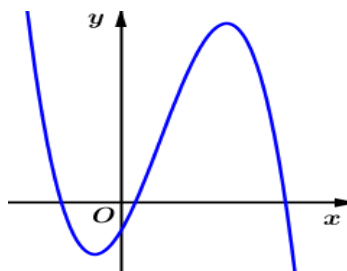
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{|x|}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{|x|}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x+1} = -1.$$

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Vậy chọn đáp án A

Câu 6. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các giá trị a, b, c, d có bao nhiêu giá trị âm?



A. 2.

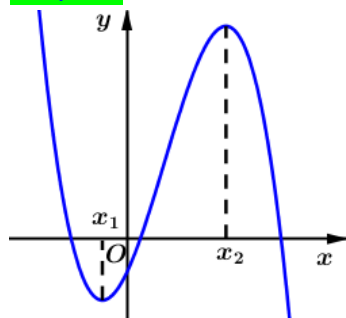
B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A



Qua đồ thị ta thấy: đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ giao với trục Oy tại điểm $D(0; d)$ nằm phía dưới trục Ox nên $d < 0$, và hình dạng của đồ thị hàm số ứng với trường hợp $a < 0$.

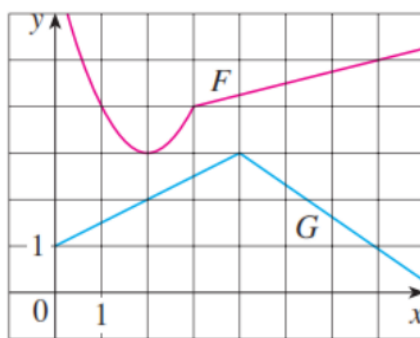
Hàm số đạt cực tiểu tại $x_1 < 0$, đạt cực đại tại $x_2 > 0$ và $x_1 + x_2 > 0$. x_1, x_2 là hai nghiệm

của phương trình $3ax^2 + 2bx + c = 0$. Khi đó: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \end{cases}$ mà $a < 0$ nên:

$$\begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị âm trong các giá trị a, b, c, d là $\begin{cases} a < 0 \\ d < 0 \end{cases}$.

Câu 7. Cho $y = F(x)$ và $y = G(x)$ là những hàm số có đồ thị cho trong hình bên dưới, đặt $P(x) = F(x)G(x)$. Tính $P'(2)$.



A. $\frac{3}{2}$.

B. 4.

C. 6.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

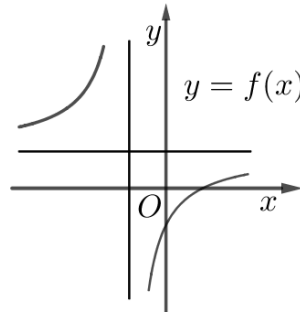
Dựa vào đồ thị, ta có $F(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7, & \text{khi } x \leq 3 \\ \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}, & \text{khi } x > 3 \end{cases}$ và $G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & \text{khi } x \leq 4 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}, & \text{khi } x > 4 \end{cases}$.

Khi đó $F'(x) = \begin{cases} 2x - 4, & \text{khi } x < 3 \\ \frac{1}{4}, & \text{khi } x > 3 \end{cases}$ và $G'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{khi } x < 4 \\ -\frac{2}{3}, & \text{khi } x > 4 \end{cases}$.

Ta có $P(x) = F(x)G(x) \Rightarrow P'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$.

Do đó $P'(2) = F'(2)G(2) + F(2)G'(2) = 0.2 + 3. \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ.



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $ad < 0, ab > 0$.

B. $bd > 0, ad < 0$.

C. $ad > 0, ab < 0$.

D. $ab < 0, ad < 0$.

Lời giải

Chọn C

Nhìn vào đồ thị, ta thấy:.

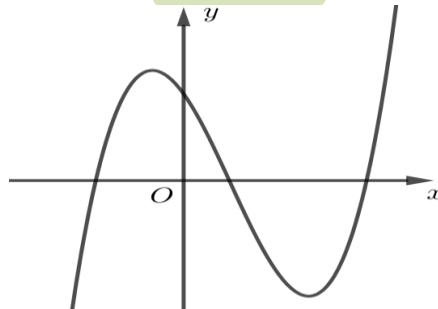
Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương $\Rightarrow a \neq 0$ và $-\frac{b}{a} > 0$. Suy ra $ab < 0$.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0$ (1)

Đồ thị có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $ac^2d > 0 \Rightarrow ad > 0$ do $c \neq 0$.

Câu 9. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

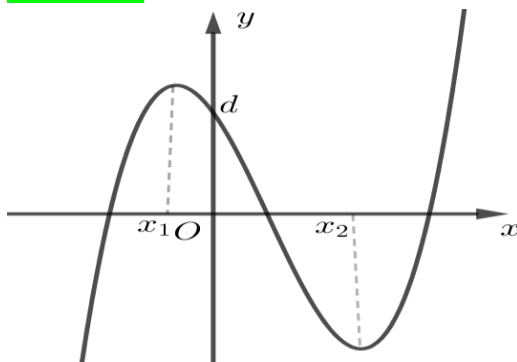
B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

Lời giải

Chọn C



Từ đồ thị của hàm số bậc ba, suy ra $a > 0$.

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $A(0; d)$ nằm phía trên trục hoành nên $d > 0$.



Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Gọi x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hoành độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $\Rightarrow x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

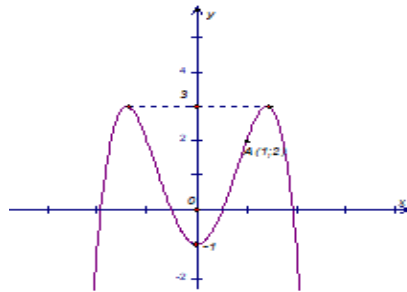
Theo định lí Vi-ét, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

Từ đồ thị, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \end{cases}.$$

Mà $a > 0$ nên suy ra
$$\begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}.$$

Vậy $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 10. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$. Giá trị của biểu thức $M = a^2 + b^2 + c^2$ có thể nhận giá trị nào trong các giá trị sau



A. $M = 18$.

B. $M = 6$.

C. $M = 20$.

D. $M = 24$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ta có $a < 0; b > 0; c < 0$, đồ thị đi qua các điểm $A = (1; 2); B = (0; -1)$ và $y_{cd} = 3$.

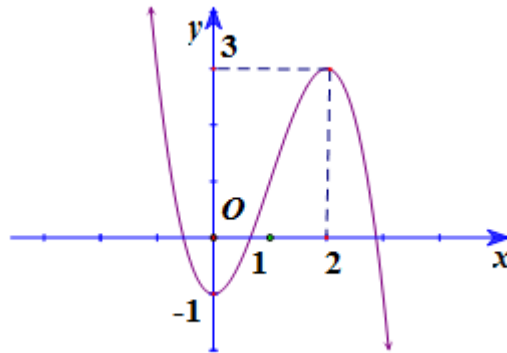
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 1 + c = 2 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = -1 \\ y\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a + b = 3 \\ a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a + b = 3 \\ b^2 + 16a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a + b = 3 \\ b^2 - 16b + 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a + b = 3 \\ \begin{cases} b = 4 \\ b = 12 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -9 \\ b = 12 \\ c = -1 \end{cases}$$

Suy ra $M = a^2 + b^2 + c^2 = 18$ hoặc $M = a^2 + b^2 + c^2 = 226$. Từ đó M có thể nhận giá trị là 18.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2f(|x|) - m = 0$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt.



A. $1 < m < 3$.

B. $-1 < m < 3$.

C. $-2 < m < 6$.

D. $2 < m < 6$.

Lời giải

Chọn C.

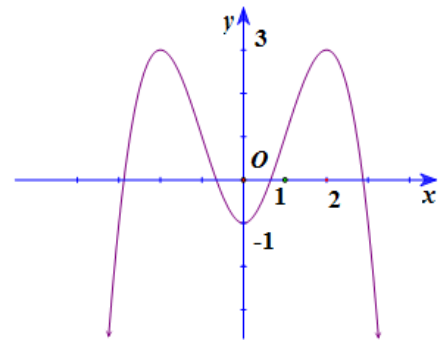
Ta có: $2f(|x|) - m = 0 \Leftrightarrow f(|x|) = \frac{m}{2}$.

N.C.Đ

$f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị như hình bên:

Từ đồ thị ta có phương trình $2f(|x|) - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt khi:

$$-1 < \frac{m}{2} < 3 \Leftrightarrow -2 < m < 6.$$



Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên nhỏ hơn 2019 của m để hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ có 5 điểm cực trị trên $\mathbb{R}$?

A. 2017.

B. 2018.

C. 2019.

D. Đáp số khác.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+ Xét hàm số $f(x) = x^3 - mx + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - m = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{m}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3m}}{3} \\ x_2 = -\frac{\sqrt{3m}}{3} \end{cases}; (m > 0)$$



Hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $f(x) = x^3 - mx + 1$ có 2 điểm cực trị có giá trị trái dấu

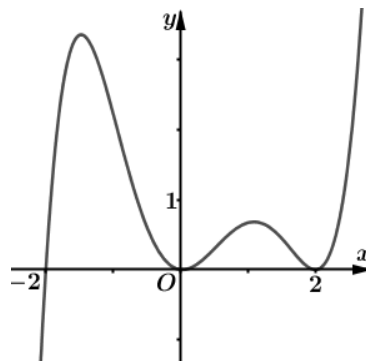
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ f(x_1) \cdot f(x_2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \left(\frac{3m\sqrt{3m}}{27} - \frac{m\sqrt{3m}}{m} + 1\right) \cdot \left(-\frac{3m\sqrt{3m}}{27} + \frac{m\sqrt{3m}}{3} + 1\right) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \left(-\frac{2m\sqrt{3m}}{9} + 1\right) \cdot \left(\frac{2m\sqrt{3m}}{9} + 1\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 - \frac{4m^3}{27} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ \sqrt[3]{\frac{27}{4}} < m < 2019 \end{cases}$$

Suy ra: Có 2017 giá trị m thỏa mãn.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), hình vẽ bên. Gọi hàm $g(x) = f[f(x)]$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?



A. 10.

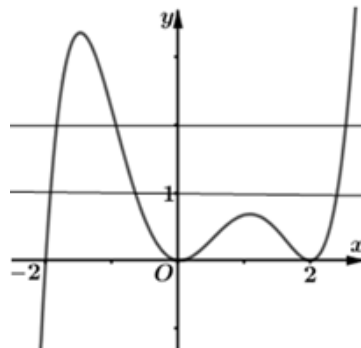
B. 12.

C. 8.

D. 14.

Lời giải

Chọn B



$$g(x) = f[f(x)] \Rightarrow g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)].$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'[f(x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-2; -1) \\ x = 0 \\ x = x_2 \in (1; 2) \\ x = 2 \\ f(x) = x_1 \in (-2; -1) \Leftrightarrow x = x_3 < -2 \\ f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 2\} \\ f(x) = x_2 \in (1; 2) \Leftrightarrow x \in \{x_4; x_5; x_6\}, x_3 < x_4 < x_5 < 0 < 2 < x_6 \\ f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in \{x_7; x_8; x_9\}, x_4 < x_7 < x_8 < x_5 < x_6 < x_9 \end{cases}$$

Kết luận phương trình $g'(x) = 0$ có 12 nghiệm phân biệt.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị.

A. $\frac{5}{4} \leq m \leq 2$.

B. $-\frac{5}{4} < m < 2$.

C. $-2 < m < \frac{5}{4}$.

D. $\frac{5}{4} < m < 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm $A(0; 2)$ và hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị (C') của nó nhận Oy làm trục đối xứng.

Khi $x \geq 0$ thì $y = f(|x|) = f(x)$. Do đó từ đồ thị (C) ta suy ra (C') như sau:

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $x \geq 0$ (đồ thị phía phải Oy).

Bước 2: Lấy đối xứng qua Oy đồ thị ở **Bước 1**.

Khi đó đồ thị (C') bao gồm các đồ thị đã vẽ ở các **Bước 1** và **Bước 2**.

Từ tính chất đối xứng qua Oy của đồ thị (C') : $y = f(|x|)$ nói trên và do $A(0; 2)$ là một điểm cực trị của nó nên hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị

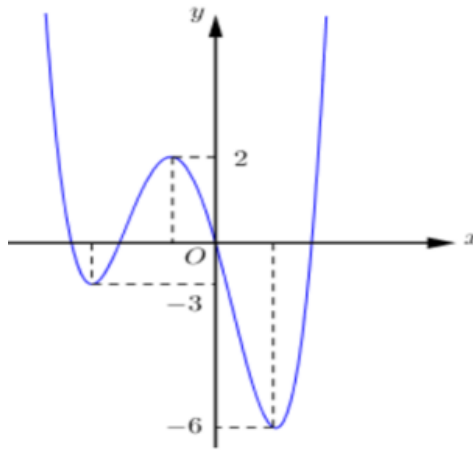
$\Leftrightarrow$ hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị dương phân biệt

$\Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 2(2m-1)x + 2 - m = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ S = \frac{2(2m-1)}{3} > 0 \\ P = \frac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right) \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2.$$

Vậy ycbt $\Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2$.

Câu 15. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên không âm của tham số m để hàm số $y = |f(x-2019) + m - 2|$ có 5 cực trị. Số các phần tử của S bằng



A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = f(x - 2019)$ được tạo thành bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ theo chiều song song với trục Ox sang bên phải 2019 đơn vị.

Đồ thị hàm số $y = f(x - 2019) + m - 2$ được tạo thành bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x - 2019)$ theo chiều song song với trục Oy lên trên $m - 2$ đơn vị.

Đồ thị hàm số $y = |f(x - 2019) + m - 2|$ được tạo thành bằng cách giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x - 2019) + m - 2$ phía trên trục Ox , lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới trục Ox qua trục Ox và xóa đi phần đồ thị phía dưới trục Ox .

Do đó để đồ thị hàm số $y = |f(x - 2019) + m - 2|$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $y = f(x - 2019) + m - 2$ có $3 \leq m - 2 < 6 \Leftrightarrow 5 \leq m < 8$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16. Xét các số thực $c > b > a > 0$. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(|x^3|)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ là

x	$-\infty$	0	a	b	c	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

A. 3.

B. 7.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $h(x) = f(x^3)$.

Ta có $h'(x) = 3x^2 \cdot f'(x^3)$.



Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta có: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 = a \\ x^3 = b \\ x^3 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{a} \\ x = \sqrt[3]{b} \\ x = \sqrt[3]{c} \end{cases}$.

Ta thấy, dấu của hàm số $h'(x)$ chính là dấu của hàm số $f'(x^3)$ (vì $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Mặt khác hàm số $y = x^3$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên dấu của hàm số $f'(x^3)$ trên mỗi khoảng $(m; n)$ chính là dấu của hàm số $f'(x)$ trên mỗi khoảng $(m^3; n^3)$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{c}$	$+\infty$			
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$									

Chú ý rằng $g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ h(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Do đó từ bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ ta suy ra được bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{c}$	$-\sqrt[3]{b}$	$-\sqrt[3]{a}$	0	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{c}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+
$g(x)$									

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 5.

Câu 17. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c < -1 \\ 4a-2b+c > 8 \\ bc < 0 \end{cases}$. Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Số điểm

cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$ lớn nhất có thể có là

A. 2.

B. 12.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(1) = a + b + c + 1 < 0$; $f(-2) = 4a - 2b + c - 8 > 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên $\exists p > 1$ sao cho $f(p) > 0$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nên $\exists q < -2$ sao cho $f(q) < 0$.

Suy ra
$$\begin{cases} f(q) \cdot f(-2) < 0 \\ f(-2) \cdot f(1) < 0 \\ f(1) \cdot f(p) < 0 \end{cases}$$
 Do đó, phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt α, β, γ

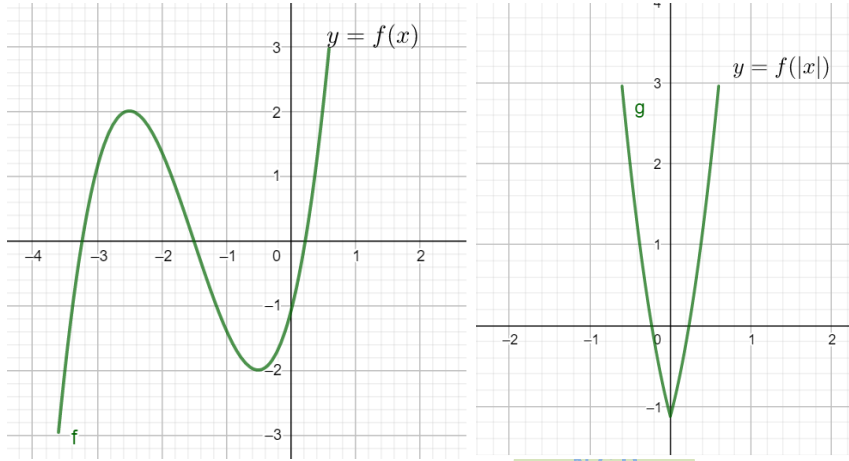
với $\alpha \in (q; -2)$, $\beta \in (-2; 1)$ và $\gamma \in (1; p)$.

Vậy $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

* Trường hợp 1: $b > 0, c < 0$

Ta có $c < 0 \Rightarrow f(0) < 0 \Rightarrow f(-2) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow \beta \in (-2; 0)$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{b}{3} > 0$

Đồ thị minh họa như sau:

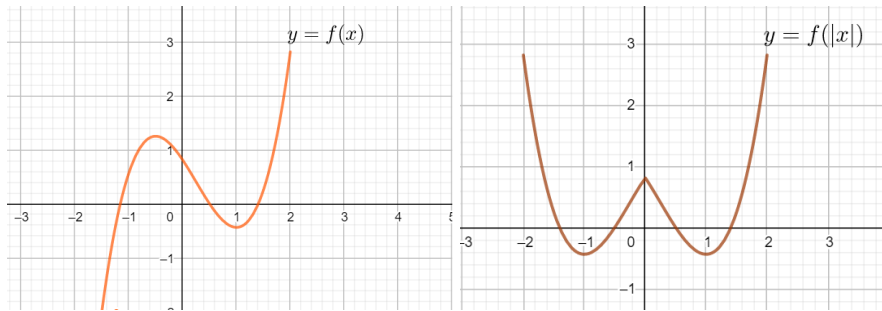


Suy ra hàm số $y = |f(|x|)|$ có 3 điểm cực trị.

* Trường hợp 2: $b < 0, c > 0$

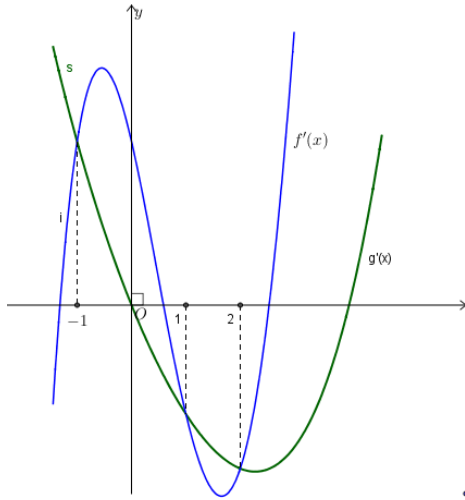
Ta có $c > 0 \Rightarrow f(0) > 0 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow \beta \in (0; 1)$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{b}{3} < 0$

Đồ thị minh họa như sau:



Suy ra hàm số $y = |f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 18. Cho các hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ và $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($m, n, p, q, r, a, b, c, d \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $f(0) = g(0)$. Các hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ có số phần tử là

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

+ Từ đồ thị hàm số $y = f'(x) \Rightarrow m \neq 0$.

+ $f(0) = g(0) \Rightarrow r = d$.

+ Ta có $f'(x) - g'(x) = 4mx^3 + 3(n-a)x^2 + 2(p-b)x + q - c$ (1).

Mặt khác từ đồ thị hai hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ ta có

$f'(x) - g'(x) = 4m(x+1)(x-1)(x-2)$ hay $f'(x) - g'(x) = 4mx^3 - 8mx^2 - 4mx + 8m$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra
$$\begin{cases} 3(n-a) = -8m \\ 2(p-b) = -4m \\ q - c = 8m \end{cases}$$

+ Phương trình $f(x) = g(x) \Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx = ax^3 + bx^2 + cx$

$\Leftrightarrow x[mx^3 + (n-a)x^2 + (p-b)x + q - c] = 0 \Leftrightarrow x\left(mx^3 - \frac{8m}{3}x^2 - 2mx + 8m\right) = 0$

$\Leftrightarrow mx\left(x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 2x + 8\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 2x + 8 = 0 \end{cases}$

Phương trình $x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 2x + 8 = 0$ có đúng một nghiệm thực khác 0.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt.



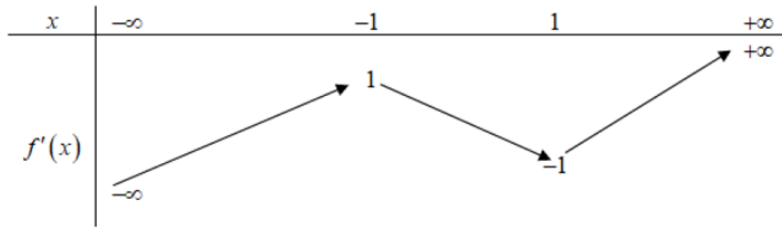
CHỦ ĐỀ: ĐỒ THỊ HÀM SỐ

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 2

BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = f'(x)$

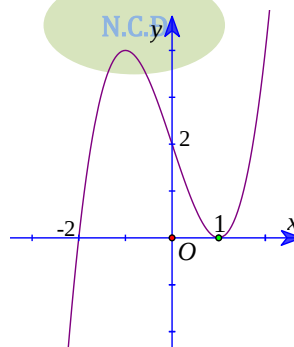
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



Hàm số $g(x) = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

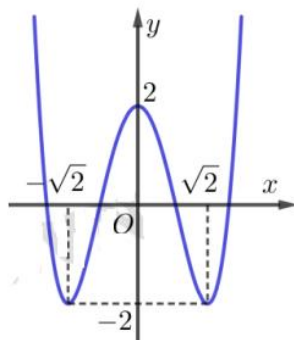
- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.



- A. 4. B. 2. C. 5. D. 3.

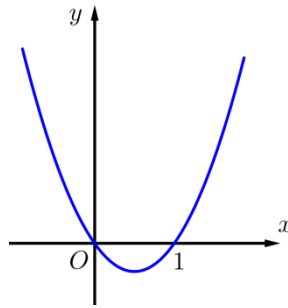
Câu 3. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$.

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(-x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; -1)$. B. $(1; 2)$. C. $(-1; 0)$. D. $(-\frac{1}{2}; 0)$.

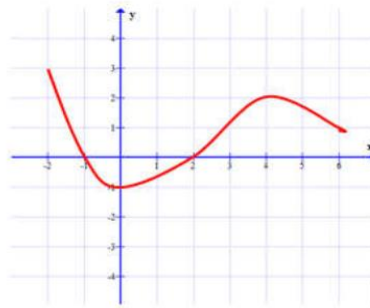
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; -1)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(-1; 0)$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

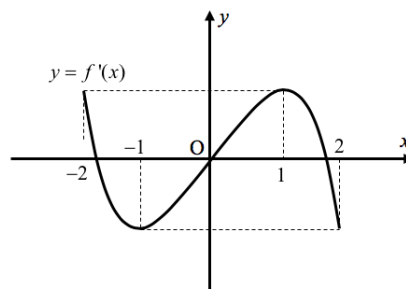


Biết rằng $f(-1) + f(3) = f(2) + f(6)$. Khi đó giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 6]$ là

- A. $f(2)$ và $f(3)$. B. $f(2)$ và $f(6)$. C. $f(2)$ và $f(-1)$. D. $f(-1)$ và $f(6)$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng

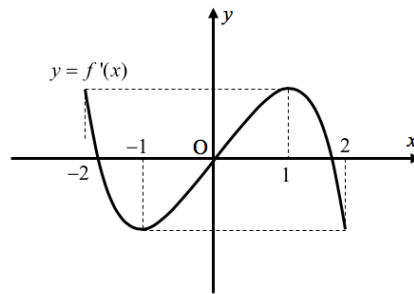
- A. $(1; 2)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(-2; -1)$.



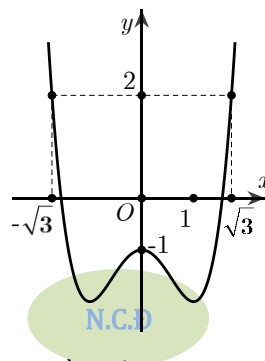


Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f\left(\frac{3\cos x + 4\sin x}{5}\right) + x^4 - 3x + 2019$ đồng biến trên khoảng

- A. $(1; 2)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(-2; -1)$.



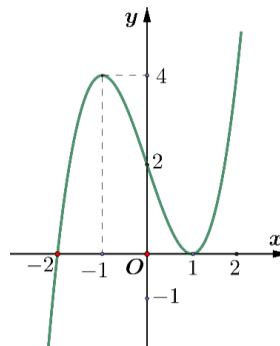
Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(1)$. B. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(\sqrt{3})$.
C. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(0)$. D. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(-\sqrt{3})$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây:

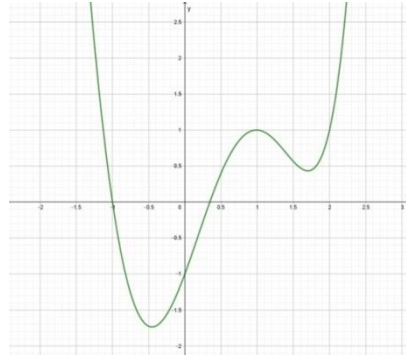


Đặt $g(x) = f(f(x))$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

- A. 6. B. 5.
C. 8. D. 7.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ.

Khi đó hàm số $g(x) = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực trị?



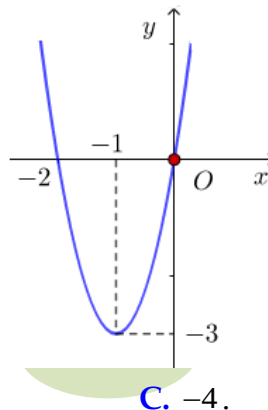
A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đạo hàm là hàm số $y = f'(x)$ với đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?



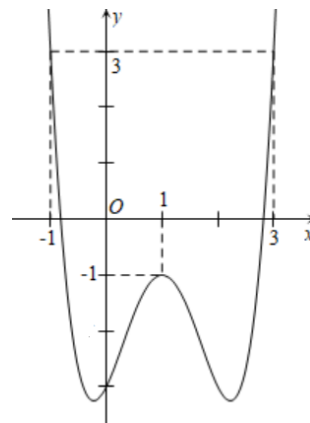
A. 4.

B. 1.

C. -4.

D. 2.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Bất phương trình $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi

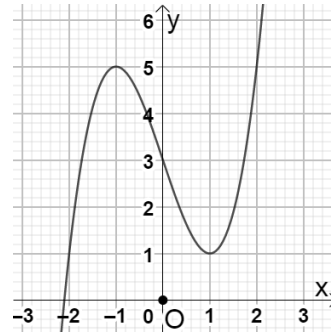
A. $m > 3f(3)$.

B. $m \geq 3f(3)$.

C. $m > 3f(-1) + 4$.

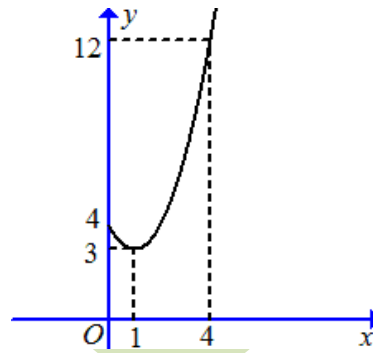
D. $m \geq 3f(-1) + 4$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 - 3x$. Khi đó khẳng định nào sau đây **đúng**?



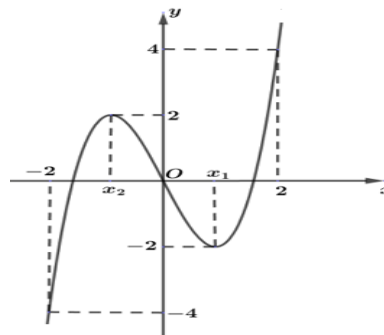
- A. $g(0) \leq g(2)$. B. $g(-2) > g(0)$. C. $g(2) < g(4)$. D. $g(-4) = g(-2)$.

Câu 15. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;3)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



- A. $s = \frac{50}{3}$ (km). B. $s = 10$ (km) C. $s = 20$ (km). D. $s = \frac{64}{3}$ (km).

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ.

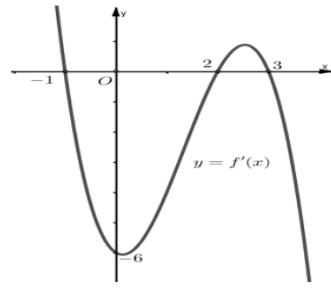


Hỏi phương trình $|f(x) - 1| = 1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2; 2]$?

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 6.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C) . Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là a, b . Giá trị $(a - b)^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

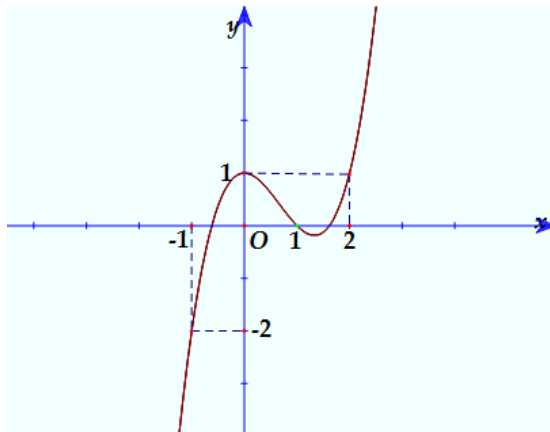
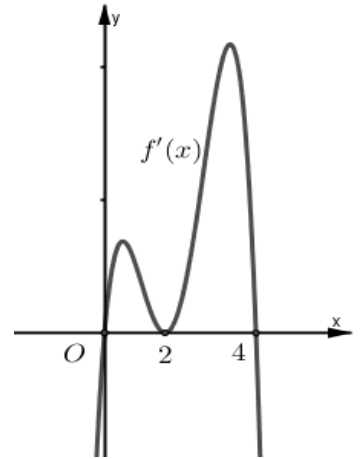
- A. $(0; 9)$. B. $(12; 16)$. C. $(16; +\infty)$. D. $(9; 12)$.



Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - m)$ có ba điểm cực trị?

- A. 4. B. 2.
C. 3. D. 1.

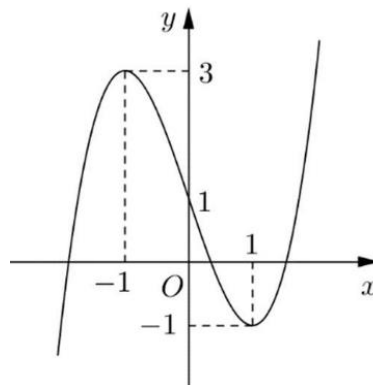
Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực tiểu tại bao nhiêu điểm?

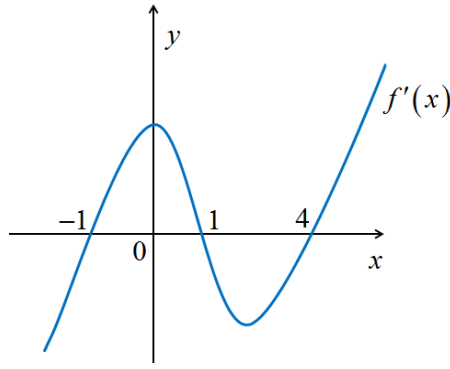
- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0; \pi]$.



- A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

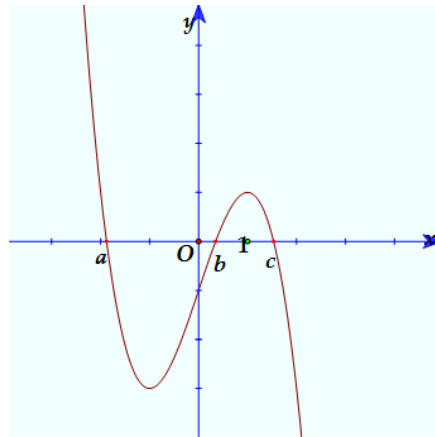
Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ :



Hàm số $y = f(1 - x^2)$ nghịch biến trên khoảng

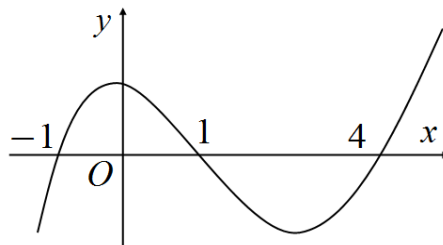
- A. $(0; 1)$. B. $(0; 2)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên (với $a < b < c$). Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



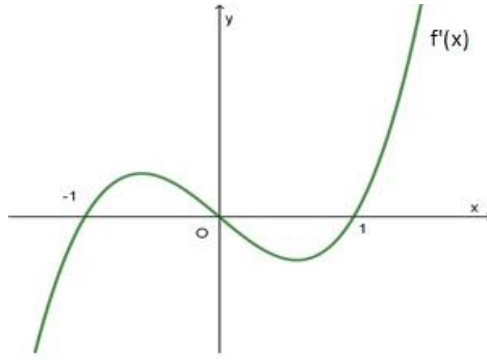
- A. $f(c) > f(a) > f(b)$. B. $f(a) = f(c) > f(b)$.
C. $f(a) > f(b) > f(c)$. D. $f(a) > f(c) > f(b)$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, trong đó $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ là



- A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(f'(x))$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(-1; 0)$. D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

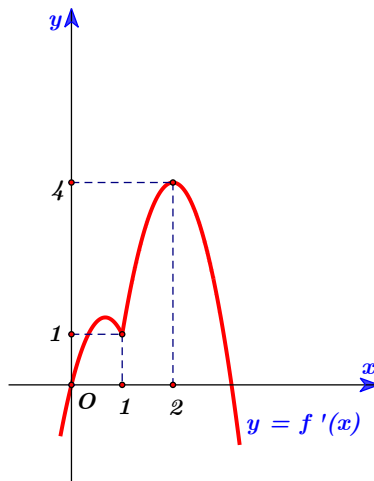
Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = \log_2(f(2x))$ đồng biến trên khoảng

- A. $(1; 2)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(-1; 1)$.

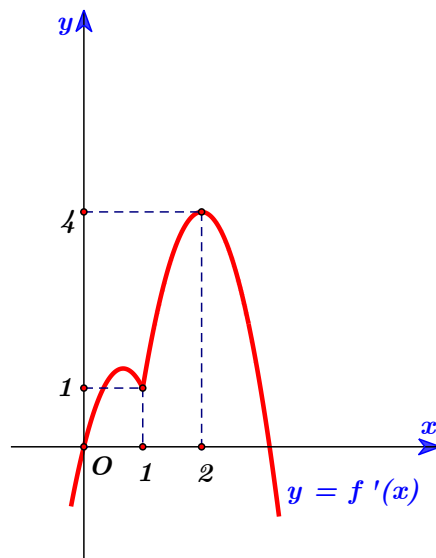
Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0) = 0$ và đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = |3f(x) - x^3|$ đồng biến trên khoảng

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(0; 2)$. D. $(1; 3)$.

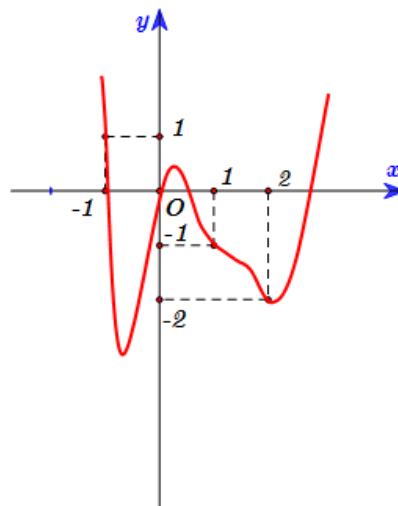
Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0) = 0$ và đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực đại của hàm số $y = |3f(x) - x^3|$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

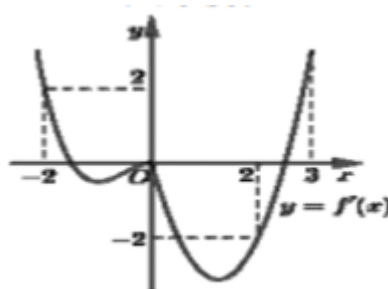
Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0) = \frac{1}{2}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = |2f(x+2) + (x+1)(x+3)|$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-3; -2)$. B. $(0; 2)$. C. $(-\infty; -3)$. D. $(-2; -1)$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y = \left| f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0) \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu cực trị trong khoảng $(-2; 3)$.



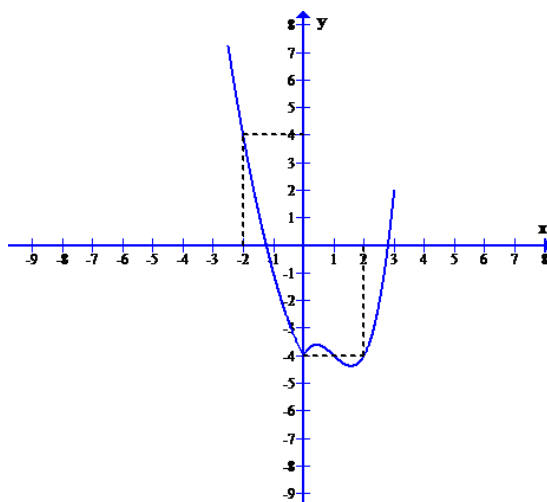
A.6.

B.2.

C.5.

D.3

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y = |f(x) + x^2 - f(0)|$ có nhiều nhất bao nhiêu cực trị trong khoảng $(-3; 3)$.

A.6.

B.2.

C.5.

D.3

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		0		0		0	

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên $[-1; 1]$ là

A. $f(-1)$.B. $f(0)$.C. $f(2)$.D. $f(1)$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		0		0		0	

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^4(2x)$ trên $[-1; 1]$ là

A. $f(-1)$.B. $f(0)$.C. $f(2)$.D. $f(1)$.

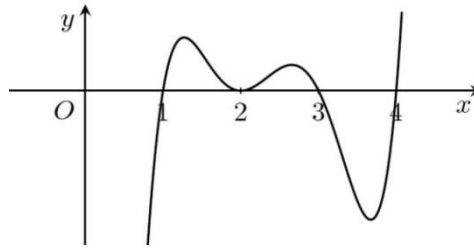
Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		0		0		0	

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x) + (x-1)$ trên $[0; 2]$ là

A. $f(-1)$.B. $f(0)$.C. $f(2)$.D. $f(1)$.

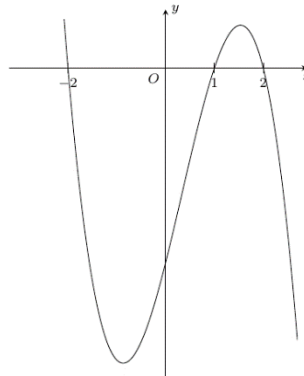
Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x^2 - 2) - \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 4\right)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -\sqrt{3})$. B. $(-3; 0)$. C. $(1; \sqrt{3})$. D. $(-\sqrt{3}; +\infty)$.

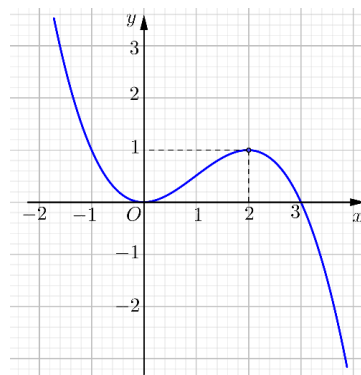
Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên và $f(2) = f(-2) = 0$.



Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trong khoảng nào trong các khoảng sau?

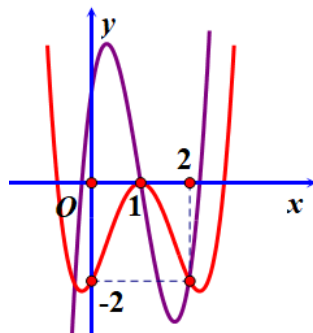
- A. $(1; 2)$. B. $(2; 5)$. C. $(5; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k$ với $(a, b, c, d, k \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt trục hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = k$ có bốn nghiệm phân biệt?



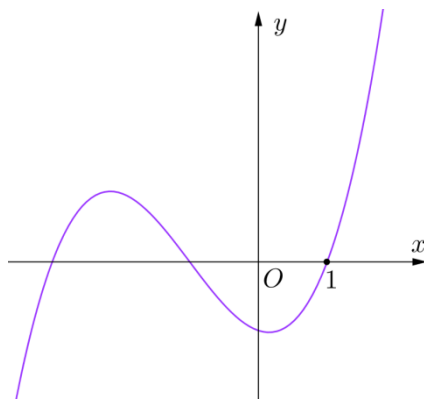
- A. 0. B. 2. C. 5. D. 7.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$. Phương trình $f(x) = me^x$ có hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0;2]$ khi và chỉ khi m thuộc nửa khoảng $[a;b)$. Giá trị của $a+b$ gần nhất với giá trị nào dưới đây?



- A. 0,27 . B. -0,54 . C. -0,27 . D. 0,54 .

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị được cho trong hình vẽ. Tìm điều kiện của m để hàm số $g(x) = f(2019^x) - mx + 2$ đồng biến trên $[0;1]$

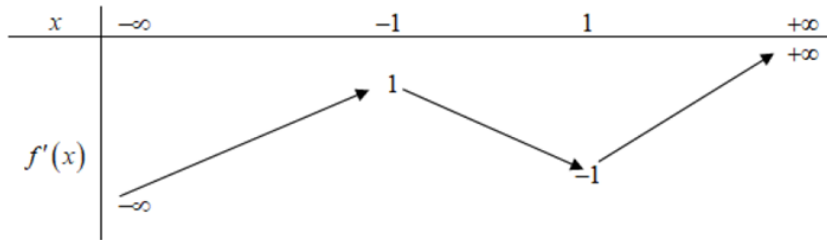


- A. $m \leq \ln 2019$. B. $0 < m < \ln 2019$. C. $m > \ln 2019$. D. $m \leq 0$.



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



Hàm số $g(x) = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 1$

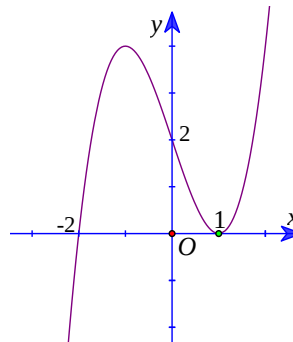
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ x = -1 \end{cases} \text{ với } x_0 > 1$$

Từ bảng biến thiên của đề bài ta được bảng biến thiên của $g(x)$:

x	$-\infty$	-1	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Từ bảng biến thiên trên ta thấy hàm số $g(x)$ có 1 cực trị.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.



A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

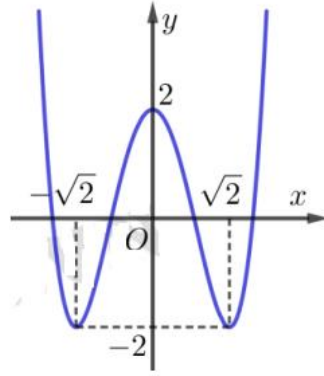
Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

$$\text{Ta có } y' = [f(x^2 - 3)]' = 2x \cdot f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Do đó hàm số $y = f(x^2 - 3)$ có ba cực trị.



Câu 3. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$.

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = f'(x) \cdot 3^{f(x)} \cdot \ln 3 + f'(x) \cdot 2^{f(x)} \cdot \ln 2 = f'(x) [3^{f(x)} \cdot \ln 3 + 2^{f(x)} \cdot \ln 2]$.

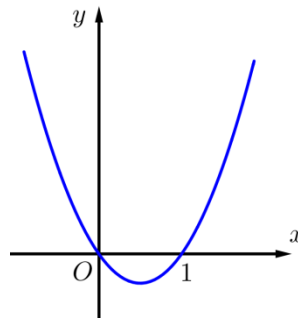
Xét $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$ (do $3^{f(x)} \cdot \ln 3 + 2^{f(x)} \cdot \ln 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$ có 4 điểm cực trị.

N.C.Đ

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(-x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; -1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(-\frac{1}{2}; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = (-x - x^2)' \cdot f'(-x - x^2) = -(1 + 2x) \cdot f'(-x - x^2)$.

Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2x = 0 \\ f'(-x - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ -x - x^2 = 0 \\ -x - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$.



Bảng biến thiên của $y = g(x)$:

x	$-\infty$	-1	$-1/2$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$g(x)$					

Dựa vào bảng trên ta thấy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ và $(0; +\infty)$. Dựa vào các đáp án ta chọn B.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; -1)$. B. $(2; +\infty)$. **C. $(0; 2)$.** D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = (x^2 - 2)' \cdot f'(x^2 - 2) = 2x \cdot f'(x^2 - 2)$.

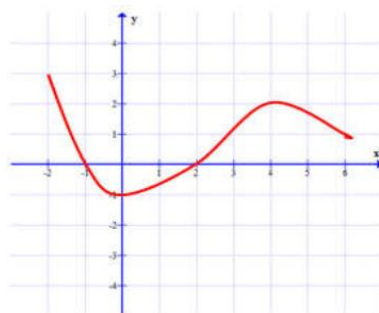
Từ bảng xét dấu đạo hàm ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có số nghiệm hữu hạn nên phương trình $g'(x) = 0$ cũng có số nghiệm hữu hạn. Do đó, ta cần tìm x sao cho $g'(x) \leq 0$.

$$\text{Ta có } g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x f'(x^2 - 2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ f'(x^2 - 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

Do đó hàm số nghịch biến trên mỗi tập: $[0; 2], (-\infty; -2]$.

Từ các đáp án của đề bài ta chọn hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng $f(-1) + f(3) = f(2) + f(6)$. Khi đó giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 6]$ là

- A. $f(2)$ và $f(3)$. B. $f(2)$ và $f(6)$. C. $f(2)$ và $f(-1)$. D. $f(-1)$ và $f(6)$.

Lời giải

Chọn B

x	-1	2	6
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$f(-1)$	$f(2)$	$f(6)$

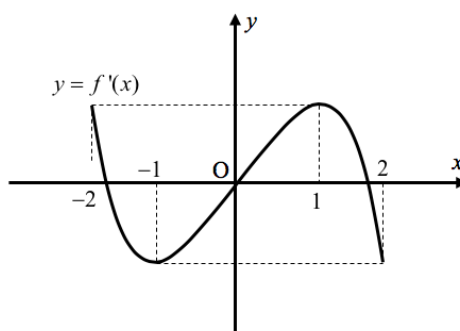
Quan sát bảng biến thiên ta thấy $\min_{[-1; 6]} f(x) = f(2)$.

Mặt khác vì $f(3) > f(2)$ nên $f(-1) - f(6) = f(2) - f(3) < 0 \Leftrightarrow f(-1) < f(6)$.

Vậy $\max_{[-1; 6]} f(x) = f(6)$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng

- A. $(1; 2)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(-2; -1)$.



Lời giải

Chọn A

Phân tích:

Bản chất dạng toán này thường là đặc điểm: Tổng hai hàm dương (hàm đồng biến), tổng hai hàm âm (hàm nghịch biến)

Tính chất:

Cho hàm số $y = f(x)$ tăng trên khoảng D_1 , hàm số $y = f(x)$ tăng trên khoảng D_2 . Khi đó ta có hàm số $y = f(x) + g(x)$ tăng trên khoảng $D = D_1 \cap D_2$

+ Quan sát bài toán: $y = x^2 - x \Rightarrow y' = 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$, nếu trắc nghiệm thấy ngay đáp án A.

Lời giải

Ta có: $y' = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1$

+ Vì $\cos x \in [-1; 1] \Rightarrow -\sin x \cdot f'(\cos x) \in [-1; 1]$ mà $2x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

+ Suy ra $y' = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1 \geq 0, \forall x \geq 1$ hay hàm số tăng trên $[1; +\infty)$

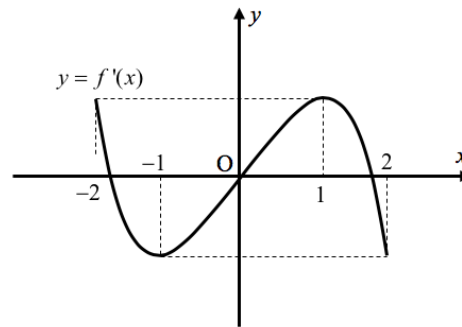
Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f\left(\frac{3\cos x + 4\sin x}{5}\right) + x^4 - 3x + 2019$ đồng biến trên khoảng

A. $(1; 2)$.

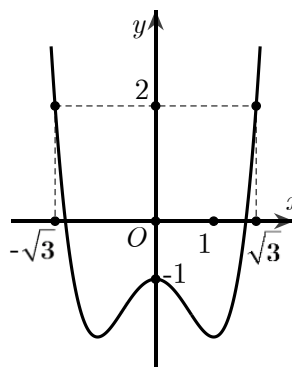
B. $(-1; 0)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-2; -1)$.



Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(1)$.

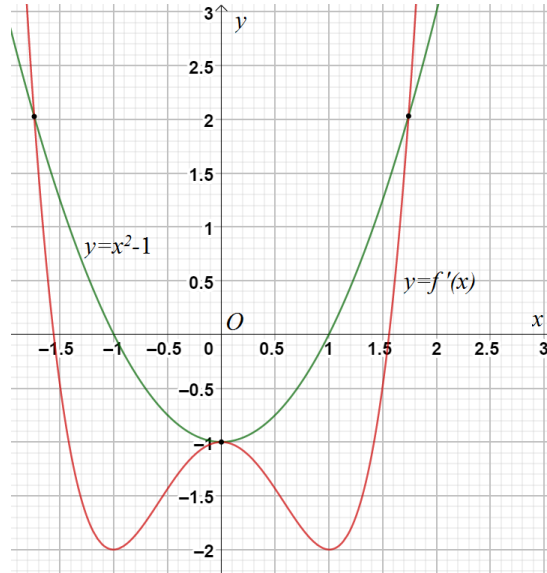
B. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(\sqrt{3})$.

C. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(0)$.

D. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(-\sqrt{3})$.

Lời giải

Chọn D



Xét $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$ với $x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Ta có $h'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3$.

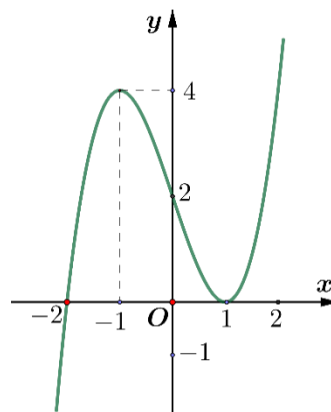
$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$

x	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$
$h'(x)$	0	$-$	0	$-$	0
$h(x)$	$3f(-\sqrt{3})$				
					$3f(\sqrt{3})$

Vậy $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = h(-\sqrt{3}) = 3f(-\sqrt{3})$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây:



Đặt $g(x) = f(f(x))$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 7.



Lời giải

Chọn A

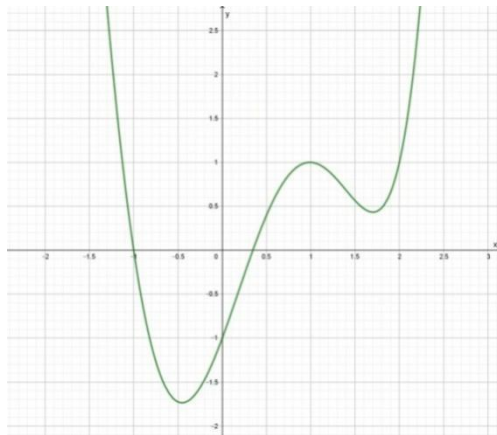
Ta có $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -1 \\ f(x) = 1 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Từ đồ thị ta có phương trình $f(x) = -1$ có 1 nghiệm; phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là $1 + 3 + 1 + 1 = 6$ nghiệm.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ.



Khi đó hàm số $g(x) = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$g'(x) = f'(x) - 1; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1.$$

Từ đồ thị của $f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 1$ có 3 nghiệm $\begin{cases} x = a, (a < 1) \\ x = 1 \\ x = b, (b > 1) \end{cases}$.

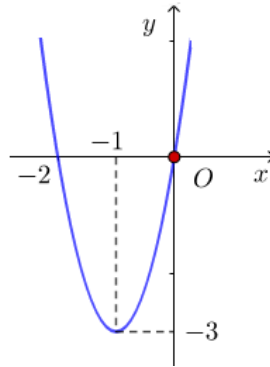
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	a	1	b	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$						

Vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị.



Câu 12. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đạo hàm là hàm số $y = f'(x)$ với đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?



A. 4.

B. 1.

C. -4.

D. 2.

Lời giải**Chọn C**

Nhìn đồ thị ta thấy $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$. Do đó, hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = -2$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm nên suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm có hoành độ âm $\Rightarrow f(-2) = 0$. (1)

Mặt khác $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

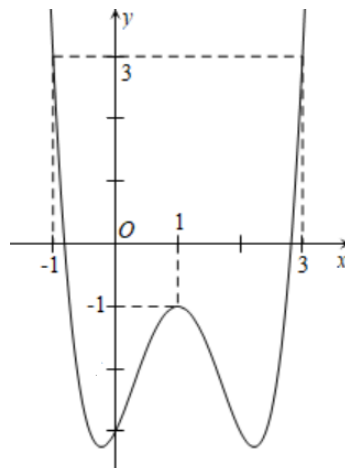
Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua các điểm có tọa độ $(0;0)$, $(-2;0)$, $(-1;-3)$. (2)

Từ (1), (2) lập được hệ phương trình
$$\begin{cases} c = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = -3 \\ -8a + 4b - 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = f(0) = -4$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.





Bất phương trình $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi

- A. $m > 3f(3)$. B. $m \geq 3f(3)$. C. $m > 3f(-1) + 4$. **D. $m \geq 3f(-1) + 4$.**

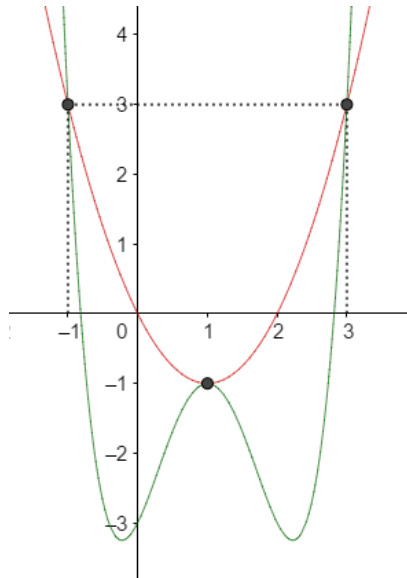
Chọn D

Ta có: $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x^2 \leq m$ với mọi $x \in (-1; 3)$.

Xét $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x^2$ với $x \in (-1; 3)$.

Khi đó: $g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 6x = 3[f'(x) - x^2 + 2x]$.

Nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f'(x)$ và parabol $y = x^2 - 2x$.



Phương trình $g'(x) = 0$ có ba nghiệm $x = -1; x = 3; x = 1$ trên đoạn $[-1; 3]$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [3f(x) - x^3 + 3x^2] = 3f(-1) + 4;$$

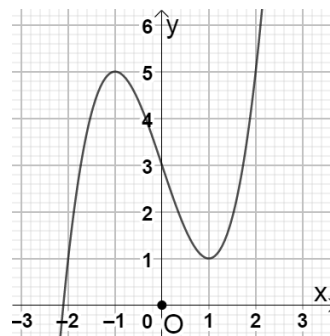
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} [3f(x) - x^3 + 3x^2] = 3f(3).$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	-1	1	3
$g'(x)$	0	-	0
$g(x)$	$3f(-1) + 4$		
			$3f(3)$

Bất phương trình $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi $m \geq g(x), \forall x \in (-1; 3) \Leftrightarrow m \geq 3f(-1) + 4$.

- Câu 14.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 - 3x$. Khi đó khẳng định nào sau đây **đúng** ?



- A. $g(0) \leq g(2)$. B. $g(-2) > g(0)$. **C. $g(2) < g(4)$.** D. $g(-4) = g(-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x) - x - 3 = f'(x) - (x + 3)$.

$$\text{Khi đó: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - (x + 3) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (x + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

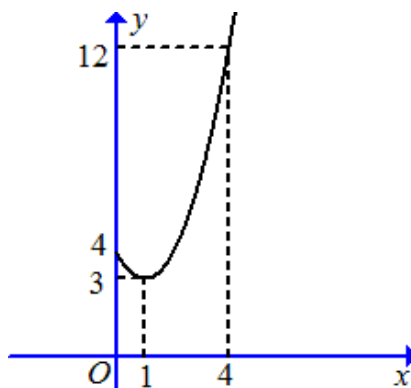
Lập Bảng biến thiên

		2	)	!	$+\infty$
	-	)	-	)	-
					$+\infty$

N.C.Đ

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ nên suy ra được $g(2) < g(4)$.

- Câu 15.** Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;3)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



- A. $s = \frac{50}{3}$ (km). B. $s = 10$ (km) C. $s = 20$ (km). **D. $s = \frac{64}{3}$ (km).**

Lời giải

Chọn D

Đồ thị được cho hình vẽ là đồ thị của Parabol nên có dạng: $y = ax^2 + bx + c$.

Biểu diễn mối liên hệ vận tốc và thời gian nên $v(t) = at^2 + bt + c$.

Quan sát đồ thị ta thấy parabol đi qua 3 điểm $A(0;4)$, $B(4;12)$, $I(1;3)$ áp vào biểu thức Parabol ta được hệ

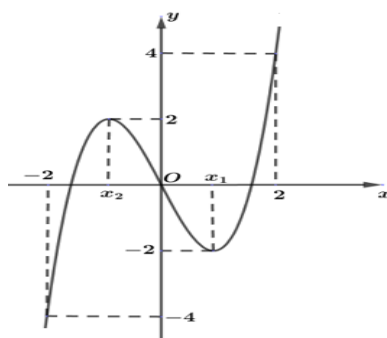
$$\begin{cases} 4 = c \\ 12 = 16a + 4b + c \\ 3 = a + b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}.$$

Ta có biểu thức vận tốc $v(t) = t^2 - 2t + 4$ lại có $s'(t) = v(t)$ nên

$$S = \int_0^4 (t^2 - 2t + 4)dt = \frac{64}{3}.$$

Là quãng đường vật chuyển động mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ.



Hỏi phương trình $|f(x) - 1| = 1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2; 2]$?

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

$$\text{Ta có } |f(x) - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = 1 \\ f(x) - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \quad (1) \\ f(x) = 0 \quad (2) \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy:

Phương trình $f(x) = 2(1)$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$.

Phương trình $f(x) = 0(2)$ có 3 nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$ không có nghiệm nào trùng với hai nghiệm của phương trình (1).

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt thuộc $[-2; 2]$.

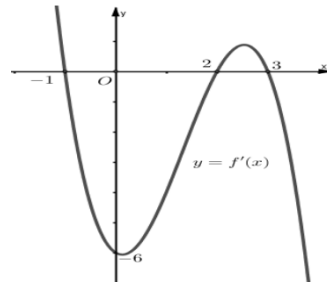
Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là a, b . Giá trị $(a - b)^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 9)$.

B. $(12; 16)$.

C. $(16; +\infty)$.

D. $(9; 12)$.



Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x) \Rightarrow f'(2) = 0$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$ là $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$$\Leftrightarrow y = f(2).$$

Cũng từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $y = f(x)$ là

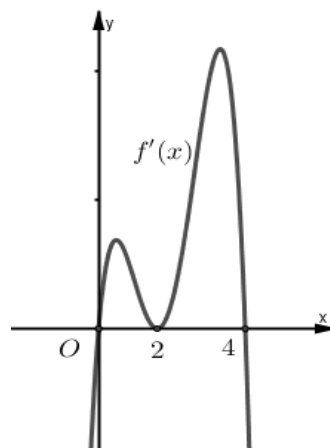
x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$		$f(2)$		$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra đường thẳng $y = f(2)$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt có

$$\text{hoành độ lần lượt là } a, b \text{ thì } \begin{cases} a < -1 \\ b > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -1 \\ -b < -3 \end{cases} \Rightarrow a - b < -4 \Rightarrow (a - b)^2 > 16.$$

$$\text{Vậy } (a - b)^2 \in (16; +\infty).$$

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - m)$ có ba điểm cực trị?



A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có $y' = 2x.f'(x^2 - m)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - m = 0 \\ x^2 - m = 2 \\ x^2 - m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \\ x^2 = m + 2 \\ x^2 = m + 4 \end{cases}.$$

Từ đồ thị ta thấy

$$f'(x^2 - m) > 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 - m < 4 \Leftrightarrow m < x^2 < m + 4.$$

$$f'(x^2 - m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - m < 0 \\ x^2 - m > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < m \\ x^2 > m + 4 \end{cases}.$$

TH1: Với $m \leq -4$.

$$y' = 2x.f'(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Suy ra hàm số $y = f(x^2 - m)$ không thể có ba cực trị.

TH2: Với $-4 < m \leq -2$.

$$y' = 2x.f'(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m+4} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu của $y' = 2x.f'(x^2 - m)$

x	$-\sqrt{m+4}$	0	$\sqrt{m+4}$
$y' = 2x.f'(x^2 - m)$	+	0	-

Từ bảng trên suy ra hàm số có 3 cực trị.

TH3: Với $-2 < m \leq 0$.

$$y' = 2x.f'(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m+2} \\ x = \pm\sqrt{m+4} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu của $y' = 2x.f'(x^2 - m)$

x	$-\sqrt{m+4}$	$-\sqrt{m+2}$	0	$\sqrt{m+2}$	$\sqrt{m+4}$
$y' = 2x.f'(x^2 - m)$	+	0	-	0	-

Từ bảng trên suy ra hàm số có 3 cực trị.

TH4: Với $m > 0$.

$$y' = 2x.f'(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \\ x = \pm\sqrt{m+2} \\ x = \pm\sqrt{m+4} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu của $y' = 2x.f'(x^2 - m)$.

x	$-\sqrt{m+4}$	$-\sqrt{m+2}$	$-\sqrt{m}$	0	$\sqrt{m}$	$\sqrt{m+2}$	$\sqrt{m+4}$		
y'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng trên suy ra hàm số có 5 cực trị.

Từ các trường hợp trên, hàm số $y = f(x^2 - m)$ có ba cực trị khi $m \in (-4; 0]$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Cách 2:

Ta có $y' = 2x \cdot f'(x^2 - m)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - m = 0 \\ x^2 - m = 2 \\ x^2 - m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \\ x^2 = m + 2 \\ x^2 = m + 4 \end{cases}$$

Để thấy

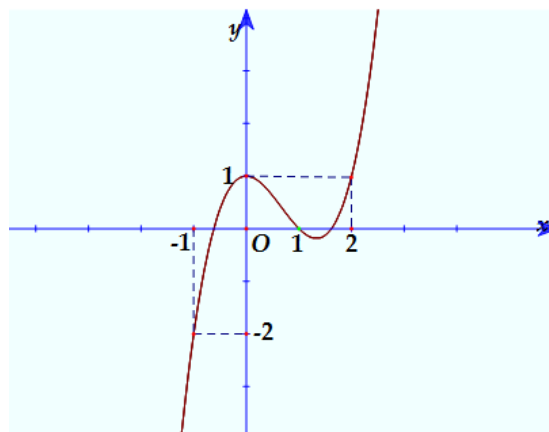
$x = 0$ là nghiệm bội lẻ của phương trình $y' = 0 \Rightarrow x = 0$ là 1 điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - m)$.

$x^2 = m + 2$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $y' = 0$.

Mặt khác $m < m + 4 \forall m$ nên hai phương trình $x^2 = m$ (1) và $x^2 = m + 4$ (2) không có nghiệm trùng nhau.

Vậy để hàm số $y = f(x^2 - m)$ có 3 điểm cực trị thì (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 đồng thời (1) vô nghiệm hoặc (1) có 1 nghiệm kép bằng 0 $\Rightarrow -4 < m \leq 0 \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực tiểu tại bao nhiêu điểm?

A. 1.

B. 2.

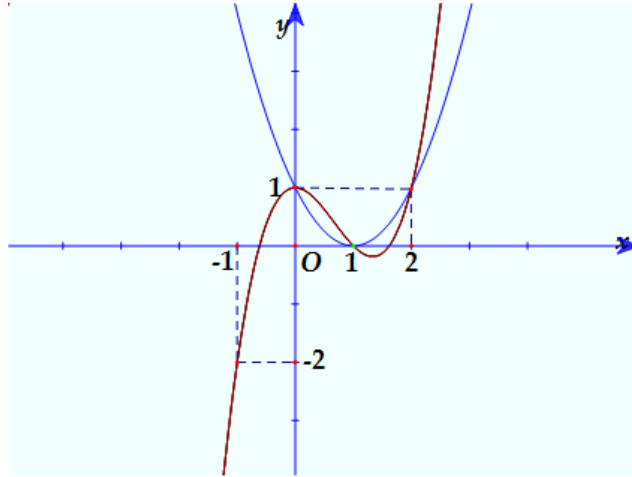
C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 2x + 1.$$



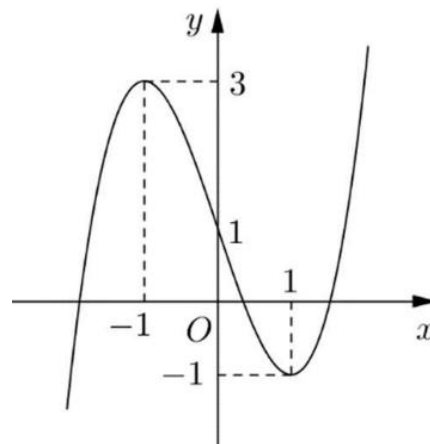
Từ đồ thị, ta thấy $x = 0, x = 1, x = 2$ là các nghiệm đơn của phương trình $g'(x) = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$				$+\infty$

Suy ra, hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại hai điểm.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0; \pi]$.



A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x$, với $x \in [0; \pi]$

Ta có $t' = \cos x$, $t' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
t'		+	-
t	0	1	0

Từ bảng biến thiên ta có:

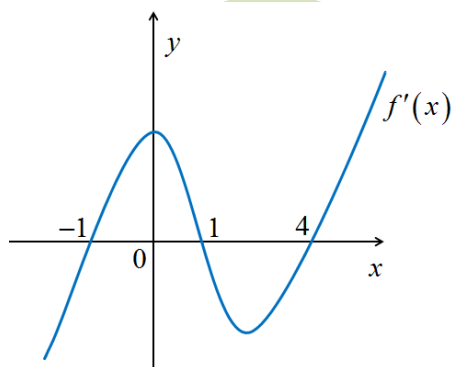
Với mỗi $t \in [0; 1)$ cho ta tương ứng $2x \in [0; \pi]$

Với $t = 1$ cho ta tương ứng $x = \frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$

Khi đó ta có phương trình $f(t) = m$ (*)

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0; \pi] \Leftrightarrow \text{pt} (*)$ có đúng một nghiệm $t \in [0; 1) \Leftrightarrow -1 < m \leq 1$, vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}$ nên có hai số nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ :



Hàm số $y = f(1 - x^2)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(0; 1)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-\infty; 0)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Nguyễn Thị Sen

Chọn A

$$\text{Ta có: } y' = -2x \cdot f'(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(1 - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - x^2 = -1 \\ 1 - x^2 = 1 \\ 1 - x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

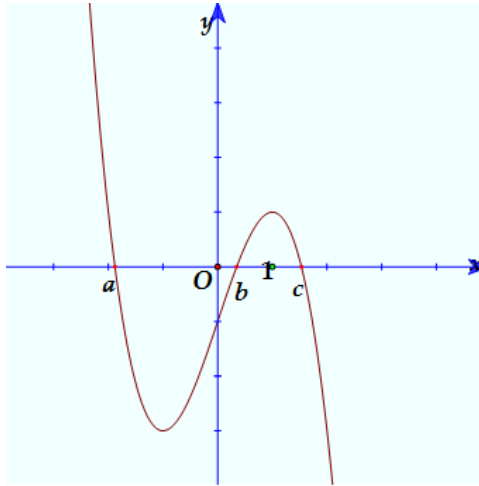
Bảng xét dấu :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$.



Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên (với $a < b < c$). Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $f(c) > f(a) > f(b)$.

B. $f(a) = f(c) > f(b)$.

C. $f(a) > f(b) > f(c)$.

D. $f(a) > f(c) > f(b)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$* \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) < 0 \Leftrightarrow f(a) > f(b).$$

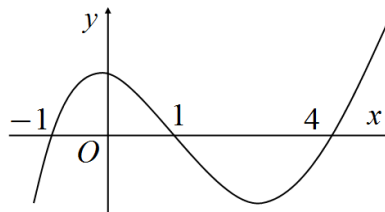
$$* \int_b^c f'(x) dx = f(c) - f(b) > 0 \Leftrightarrow f(c) > f(b).$$

$$* \int_a^b f'(x) dx + \int_b^c f'(x) dx < 0 \Leftrightarrow [f(b) - f(a)] + [f(c) - f(b)] < 0$$

$$\Leftrightarrow f(c) - f(a) < 0 \Leftrightarrow f(a) > f(c).$$

Vậy $f(a) > f(c) > f(b)$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, trong đó $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm của phương trình $f'(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ là



A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

* Dựa vào đồ thị ta có $m > 0$ và

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4m(x+1)(x-1)(x-4) \\ &= 4mx^3 - 16mx^2 - 4mx + 16m. \end{aligned}$$

$$* \text{ Mà } f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q. \text{ Suy ra } \begin{cases} n = -\frac{16}{3}m \\ p = -2m \\ q = 16m \end{cases}$$

$$* \text{ Phương trình } f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$$

$$\Leftrightarrow mx^4 - \frac{16}{3}mx^3 - 2mx^2 + 16mx + r = 16m - \frac{128}{3}m - 8m + 32m + r$$

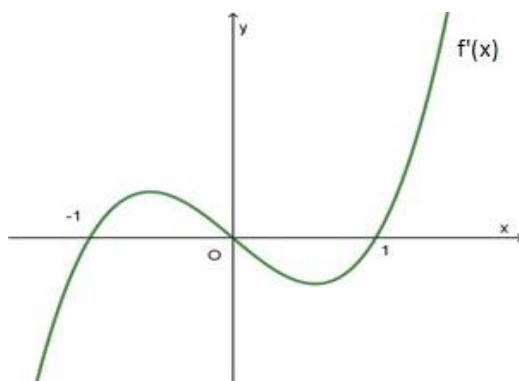
$$\Leftrightarrow m\left(x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x + \frac{8}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^3 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{26}{3}x - \frac{4}{3} = 0 \end{cases}$$

Phương trình $x^3 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{26}{3}x - \frac{4}{3} = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 2.

Vậy phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ có 4 nghiệm.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(f'(x))$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Dựa vào đồ thị ta có: $f'(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$.

$$g(x) = f(f'(x)) = f(x^3 - x) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 - 1)f'(x^3 - x).$$

$$\text{Xét } g'(x) < 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 1)f'(x^3 - x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 1 > 0 \\ f'(x^3 - x) < 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } \begin{cases} 3x^2 - 1 > 0 \\ f'(x^3 - x) < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right) \\ \begin{cases} x^3 - x < -1 \\ 0 < x^3 - x < 1 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right) \\ x \in (-\infty; -1, 32\dots) \cup (-1; 0) \cup (1; 1, 32\dots) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1, 32\dots) \cup \left(-1; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup (1; 1, 32\dots). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } \begin{cases} 3x^2 - 1 < 0 \\ f'(x^3 - x) > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ \begin{cases} -1 < x^3 - x < 0 \\ x^3 - x > 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ x \in (-1, 32\dots; -1) \cup (0; 1) \cup (1, 32\dots; +\infty) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right). \end{aligned}$$

N.C.Đ

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng

$$(-\infty; -1, 32\dots); \left(-1; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right); (1; 1, 32\dots)$$

Cách 2:

Dựa vào đồ thị ta có: $f'(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$.

$$g(x) = f(f'(x)) = f(x^3 - x) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 - 1)f'(x^3 - x).$$

Xét đáp án B: $x \in (-\infty; -2)$.

$$* x \in (-\infty; -2) \Rightarrow (3x^2 - 1) \in (11; +\infty) \Rightarrow 3x^2 - 1 > 0.$$

$$* x \in (-\infty; -2) \Rightarrow (x^3 - x) \in (-\infty; -6) \Rightarrow f'(x^3 - x) < 0 \text{ (dựa vào đồ thị của } f'(x)).$$

$$\text{Vậy với } x \in (-\infty; -2) \text{ thì ta có: } \begin{cases} 3x^2 - 1 > 0 \\ f'(x^3 - x) < 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0.$$

$\Rightarrow$ với $x \in (-\infty; -2)$ thì hàm số $g(x)$ nghịch biến.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $y = \log_2(f(2x))$ đồng biến trên khoảng

A. $(1; 2)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(-1; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y = g(x) = \log_2(f(2x))$.

Ta có $y' = g'(x) = (\log_2(f(2x)))' = \frac{(f(2x))'}{f(2x) \cdot \ln 2} = \frac{2 \cdot f'(2x)}{f(2x) \cdot \ln 2} = 0$.

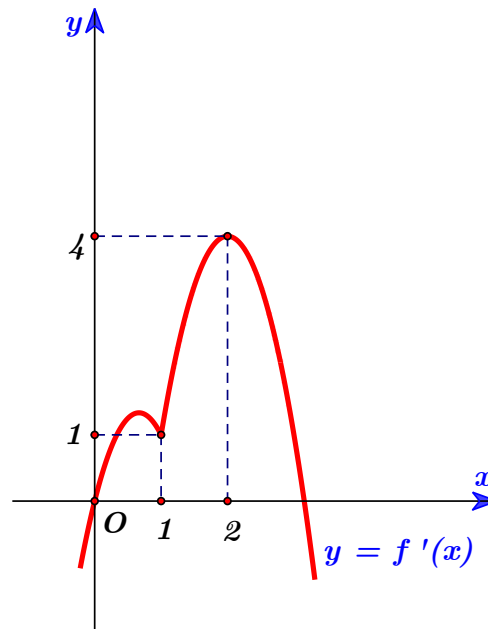
$$\Rightarrow f'(2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -1 \\ 2x = 0 \\ 2x = 1 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên của $y = g(x)$

x	$-\infty$	$-1/2$	0	$1/2$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$						

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = \log_2(f(2x))$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0) = 0$ và đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = |3f(x) - x^3|$ đồng biến trên khoảng

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-\infty; 2)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(1; 3)$.

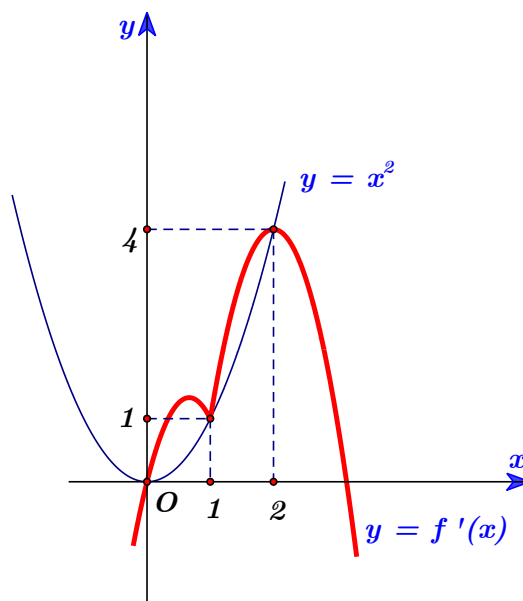
Lời giải

Chọn C

N.C.Đ

Đặt $g(x) = 3f(x) - x^3$, ta có: $g'(x) = 3[f'(x) - x^2]$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ (hoành độ giao

điểm của đồ thị hàm $y = f'(x)$ và $(P): y = x^2$)



Do $f(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

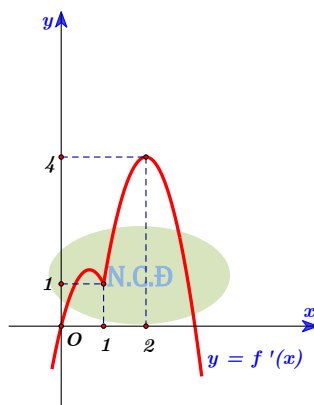
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |g(x)|$ như sau



x	$-\infty$	0	1	2	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	+	-
$g(x)$	$+\infty$	0			0	$-\infty$
$ g(x) $	$+\infty$	0			0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(0;2)$ và $(x_0;+\infty)$ với $x_0 > 2$, vậy chọn C.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0) = 0$ và đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực đại của hàm số $y = |3f(x) - x^3|$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

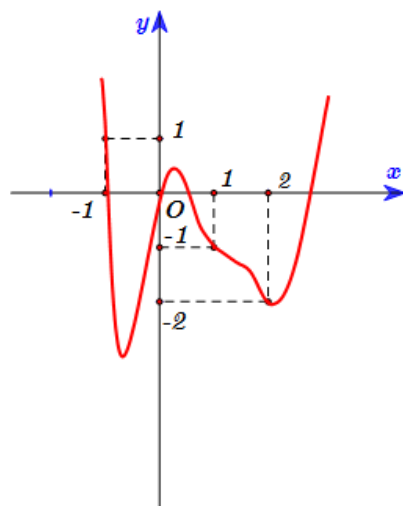
D. 3.

Lời giải

Chọn B

Từ **Lời giải** Câu 36 suy ra hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu, chọn B.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0) = \frac{1}{2}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = |2f(x+2) + (x+1)(x+3)|$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-3; -2)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-\infty; -3)$.

D. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn A

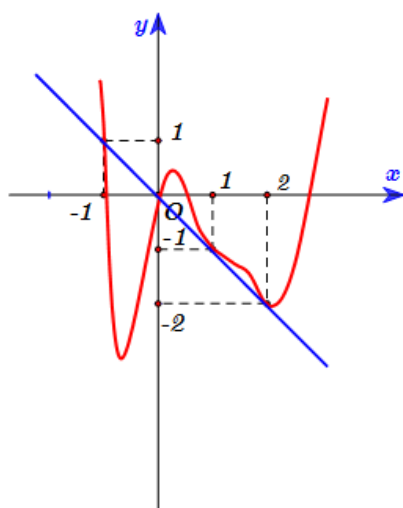
Đặt $g(x) = 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$.

Ta có $g'(x) = 2[f'(x+2) + (x+2)]$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2)$

Đặt $t = x+2$ ta được $f'(t) = -t$ (1).

N.C.Đ

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f'(t)$ và đường thẳng $d: y = -t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $y = f'(t)$ và đường thẳng $y = -t$

$$\text{Ta có: } f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Do $f(0) = \frac{1}{2}$ nên $g(-2) = 2f(0) + (-2+1)(-2+3) = 0$

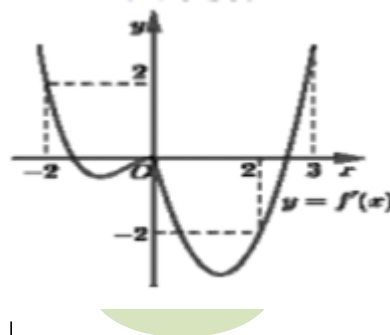


Bảng biến thiên của hàm số $y = |g(x)|$

x	$-\infty$		0		1		2		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	-		-	
$g(x)$	$+\infty$		0					0		$-\infty$	
$ g(x) $	$+\infty$		0					0		$+\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; x_0)$ và $(-3; -2)$ với $x_0 < -3$, vậy chọn A.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y = \left| f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0) \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu cực trị trong khoảng $(-2; 3)$.

A.6.

B.2.

C.5.

D.3

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $h(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0)$.

Ta có $h'(x) = f'(x) + x$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$

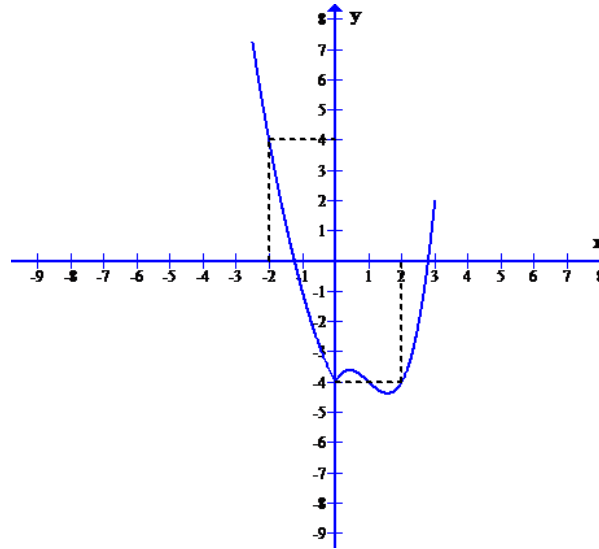
Nghiệm phương trình trên là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = -x$ và $y = f'(x)$

Dựa vào đồ thị suy ra phương trình: $f'(x) = -x$ có ba nghiệm $\begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Trên khoảng $(-2; 3)$, hàm số $h(x)$ có một điểm cực trị là $x = 2$, (do qua nghiệm $x = 0$, $h'(x)$ không đổi dấu). Do đó đồ thị hàm số $y = h(x)$ cắt trục hoành tại tối đa 2 điểm.

Suy ra hàm số $y = |h(x)|$ có tối đa $2 + 1 = 3$ điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y = |f(x) + x^2 - f(0)|$ có nhiều nhất bao nhiêu cực trị trong khoảng $(-3; 3)$.

A.6.

B.2.

C.5.

D.3

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số: $g(x) = f(x) + x^2 - f(0)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) + 2x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2x$

Nghiệm phương trình trên là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = -2x$ và $y = f'(x)$

Dựa vào đồ thị suy ra phương trình: $f'(x) = -2x$ có hai nghiệm $\begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Trên khoảng $(-3; 3)$, hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị là $x = 2, x = -2$. Do đó đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại tối đa 3 điểm.

Suy ra hàm số $y = |g(x)|$ có tối đa $3 + 2 = 5$ điểm cực trị trong khoảng $(-3; 3)$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$\nearrow 0$	$\searrow 0$	$\nearrow 0$	$\searrow 0$	$\nearrow 0$	

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên $[-1; 1]$ là

A. $f(-1)$.**B. $f(0)$.**C. $f(2)$.D. $f(1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g(x) = f(2x) - \sin^2 x \leq f(2x), \forall x \in [-1; 1]$.

Mặt khác, từ bảng biến thiên của $f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$



$f(x)$	$-\infty$						$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $f(2x) \leq f(0)$ với mọi $x \in [-1; 1]$, do đó giá trị lớn nhất của $g(x)$ trên $[-1; 1]$ là $f(0)$, đạt được khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(2x) = f(0) \\ \sin^2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$							

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^4(2x)$ trên $[-1; 1]$ là

A. $f(-1)$.

B. $f(0)$.

C. $f(2)$.

D. $f(1)$.

Lời giải

Ta có: $g(x) = f(2x) - \sin^4(2x) \leq f(2x)$, $\forall x \in [-1; 1]$.

Mặt khác, từ bảng biến thiên của $f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$							
$f(x)$	$-\infty$						$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $f(2x) \leq f(0)$ với mọi $x \in [-1; 1]$, do đó giá trị lớn nhất của $g(x)$ trên $[-1; 1]$ là $f(0)$, đạt được khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(2x) = f(0) \\ \sin^4(2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$							

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x) + (x-1)^2$ trên $[0; 2]$ là

A. $f(-1)$.

B. $f(0)$.

C. $f(2)$.

D. $f(1)$.

Lời giải

Ta có: $g(x) = f(2x) + (x-1)^2 \geq f(2x)$, $\forall x \in [0; 2]$.

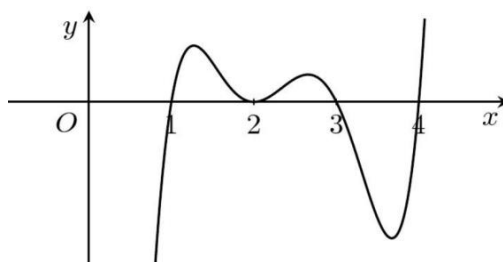
Mặt khác, từ bảng biến thiên của $f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$							$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $f(2x) \geq f(2)$ với mọi $x \in [0; 2]$, do đó giá trị nhỏ nhất của

$g(x)$ trên $[0; 2]$ là $f(2)$, đạt được khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(2x) = f(2) \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x^2 - 2) - \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 4\right)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -\sqrt{3})$.

B. $(-3; 0)$.

C. $(1; \sqrt{3})$.

D. $(-\sqrt{3}; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Chọn $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)(x-4)$

Đặt $y = g(x) = f(x^2 - 2) - \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 4\right)$.

Khi đó $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 2) - (x^2 + 2x - 3)$.

$= 2x \cdot (x^2 - 2 - 1)(x^2 - 2 - 2)^2(x^2 - 2 - 3)(x^2 - 2 - 4) - (x^2 + 2x - 3)$

$= 2x \cdot (x^2 - 3)(x^2 - 4)^2(x^2 - 5)(x^2 - 6) - (x^2 + 2x - 3)$

$g'(-2) = 3 > 0$ nên loại phương án A và B.

$g'(3) = 10788 > 0$ nên loại phương án D.

Cách 2:

Ta có $y' = g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 2) - (x^2 + 2x - 3)$

Từ đồ thị ta có $f'(x^2 - 2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 < 1 \\ 3 < x^2 - 2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \\ x \in (-\sqrt{6}; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \sqrt{6}) \end{cases}$

Suy ra $2xf'(x^2 - 2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{5}; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{5}; \sqrt{6})$



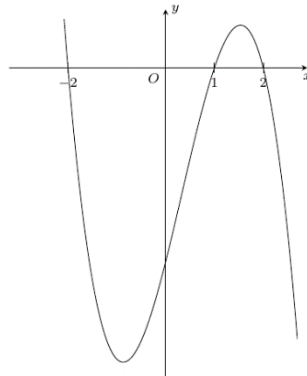
Nên ta lập được bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{6}$	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$+\infty$
$2xf'(x^2-2)$		-	-	0	+	0	-	0	+	0	+
$-x^2-2x+3$		-	0	+	+	+	+	+	-	-	-
y'		-	0	0	+	0	0	0	0	-	-

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$, $(1; \sqrt{3})$ và $(\sqrt{5}; \sqrt{6})$.

Vậy đáp án đúng là đáp án C.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên và $f(2) = f(-2) = 0$.



Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trong khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(1; 2)$.

B. $(2; 5)$.

C. $(5; +\infty)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = -2f(3-x)f'(3-x)$.

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

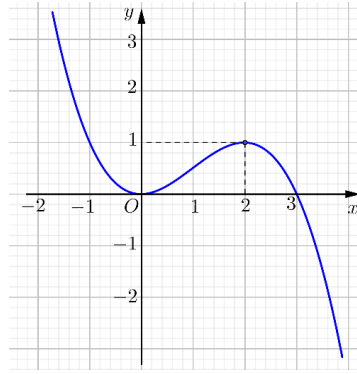
x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			0			0			
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(3-x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến khi và chỉ khi

$$g'(x) = -2f(3-x)f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3-x < 1 \\ 3-x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5 \\ x < 1 \end{cases}$$

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k$ với $(a, b, c, d, k \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0; 0)$ và cắt trục hoành tại $A(3; 0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5; 5]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = k$ có bốn nghiệm phân biệt?



A. 0.

B. 2.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy $f'(x)$ không thể có bậc nhỏ hơn bằng 2, do đó $a \neq 0$.

Ta suy ra $f'(x) = ax^2(x-3)$, đồ thị của nó đi qua $A(2;1)$ nên

$$1 = a \cdot 2^2 \cdot (2-3) = - \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = -\frac{x^2}{4}(x-3), \text{ do đó } f(x) = -\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{4} + k.$$

$$\text{Ta có } f(x) = k \Leftrightarrow -\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{4} + k = k \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } f(-x^2 + 2x + m) = k \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + m = 0 \\ -x^2 + 2x + m = 4 \end{cases}.$$

Phương trình $-x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta'_1 = 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Phương trình $-x^2 + 2x + m = 4$ có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta'_2 = 1 + m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 3$.

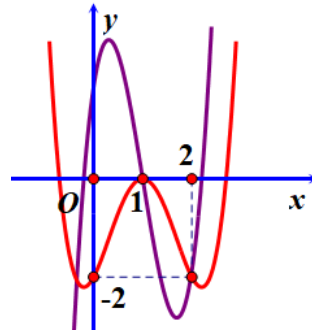
$$\text{Hai phương trình nếu như có nghiệm chung } x_0 \text{ thì } \begin{cases} -x_0^2 + 2x_0 + m = 0 \\ -x_0^2 + 2x_0 + m = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 = 0.$$

Do vậy để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = k$ có 4 nghiệm phân biệt thì

$$\begin{cases} m > -1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Do m nguyên và $m \in [-5; 5]$ nên $m \in \{4; 5\}$. Vậy có 2 giá trị của m .

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$. Phương trình $f(x) = me^x$ có hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0; 2]$ khi và chỉ khi m thuộc nửa khoảng $[a; b)$. Giá trị của $a + b$ gần nhất với giá trị nào dưới đây?



A. 0,27 .

B. -0,54 .

C. -0,27 .

D. 0,54 .

Lời giải

Chọn C

Phương trình: $f(x) = m.e^x \Leftrightarrow m = \frac{f(x)}{e^x}$.

Xét $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ với $x \in [0; 2]$, có:

$$g'(x) = \frac{f'(x).e^x - e^x.f(x)}{e^{2x}} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x).e^x - e^x.f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \text{ với } x \in [0; 2].$$

Dựa vào đồ thị hàm số hàm số ta suy ra được $y = f(x)$ là đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm, $y = f'(x)$ có đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

Từ đó ta có bảng biến thiên:

x	1	2
y'	+	-
y	$g(1)$	$g(2)$

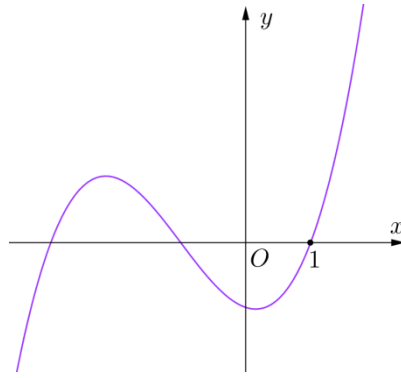
Với: $g(1) = \frac{f(1)}{e^1} = \frac{0}{e} = 0$, $g(0) = \frac{f(0)}{e^0} = -2$, $g(2) = \frac{f(2)}{e^2} = -\frac{2}{e^2}$.

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình $m = \frac{f(x)}{e^x}$ có hai nghiệm thực phân biệt

thuộc $[0; 2]$ khi và chỉ khi $g(2) \leq m < g(1) \Leftrightarrow -\frac{2}{e^2} \leq m < 0$.

Hay $m \in \left[-\frac{2}{e^2}; 0\right) \Rightarrow a + b = -\frac{2}{e^2} + 0 = -\frac{2}{e^2} \approx 0,27$.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị được cho trong hình vẽ. Tìm điều kiện của m để hàm số $g(x) = f(2019^x) - mx + 2$ đồng biến trên $[0; 1]$

A. $m \leq \ln 2019$.B. $0 < m < \ln 2019$.C. $m > \ln 2019$.D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = 2019^x \ln 2019 \cdot f'(2019^x) - m$.

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2019^x \ln 2019 \cdot f'(2019^x) = m$, (1)

Đặt $t = 2019^x$, ta có $t \in [1; 2019]$ và $2019^x \ln 2019 \cdot f'(2019^x) = t \cdot \ln 2019 \cdot f'(t)$

Đặt $h(t) = t \cdot \ln 2019 \cdot f'(t)$, $t \in [1; 2019]$.

Phương trình (1) trở thành $h(t) = t \cdot \ln 2019 \cdot f'(t) = m$, (2)

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $[1; 2019]$, do đó $f''(x) \geq 0$ trên $[1; 2019]$. Hơn nữa, từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta cũng có $f'(x) \geq 0$ trên $[1; 2019]$.

Do đó $h'(t) = \ln 2019 [f'(t) + t \cdot f''(t)] \geq 0 \forall t \in [1; 2019]$, $h'(t) = 0$ tại hữu hạn điểm, nên $h(t)$ đồng biến trên $[1; 2019]$. Từ đó (2) có số nghiệm là hữu hạn trên $[1; 2019]$, nên phương trình $g'(x) = 0$ có số nghiệm hữu hạn trên $[1; 2019]$.

Như vậy: Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[0; 1]$

$$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \text{ với mọi } x \in [0; 1] \Leftrightarrow m \leq 2019^x \cdot \ln 2019 \cdot f'(2019^x) \forall x \in [0; 1]$$

$$\Leftrightarrow m \leq t \cdot \ln 2019 \cdot f'(t) \forall t \in [1; 2019] \Leftrightarrow m \leq \min_{[1; 2019]} h(t) = h(1) = 1 \cdot \ln 2019 \cdot f'(1) = 0.$$

Vậy $m \leq 0$.



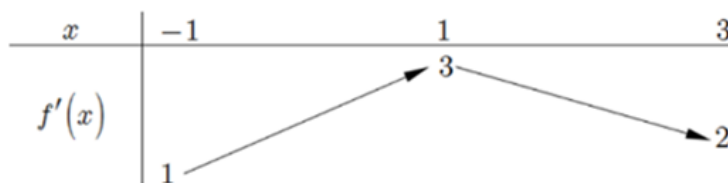
CHỦ ĐỀ: ĐỒ THỊ HÀM SỐ

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 3.1

DÙNG ĐỒ THỊ TÌM SỐ NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới



Tìm m để bất phương trình $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$.

- A. $m < f(0)$. B. $m \leq f(0)$. C. $m \leq f(3)$. D. $m < f(1) - \frac{2}{3}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới

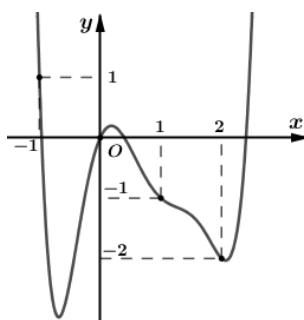
N.C.Đ

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	2	3	2

Tìm m để bất phương trình $m + 2\sin x \leq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$.

- A. $m \geq f(0)$. B. $m \leq f(1) - 2\sin 1$. C. $m \leq f(0)$. D. $m \geq f(1) - 2\sin 1$.

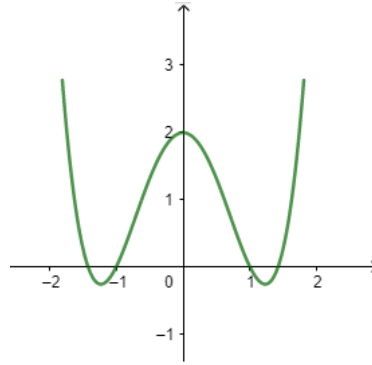
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Tìm m để bất phương trình $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$.

- A. $m \geq 2f(0) - 1$. B. $m \leq 2f(0) - 1$. C. $m \leq 2f(-1)$. D. $m \geq 2f(-1)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau.



Số nghiệm thực của phương trình $f^2(x) - 1 = 0$ là

- A. 7. B. 4. C. 3. D. 8.

Câu 5. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(2 + \sqrt{3})^x - m(2 - \sqrt{3})^x = 10$ có 2 nghiệm dương phân biệt. Số phần tử của S bằng

- A. 12. B. 15. C. 9. D. 4.

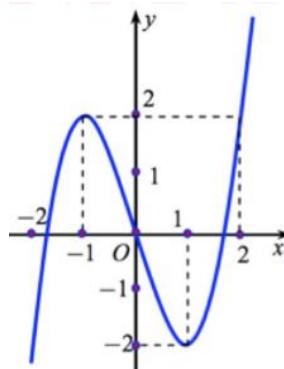
Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		1		0		$+\infty$

Khi đó phương trình $f(x) + 1 = m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

- A. $1 < m < 2$. B. $1 \leq m \leq 2$. C. $0 \leq m \leq 1$. D. $0 < m < 1$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{2f(\cos x)}) = m$ có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

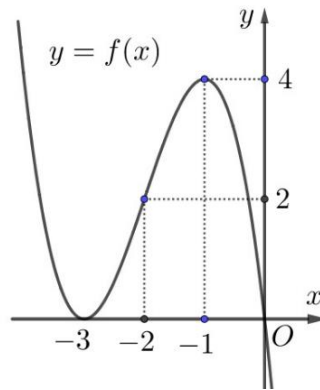
- A. 5. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 8. Tìm m để phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = \log_2 m$ có 8 nghiệm phân biệt:

- A. $0 < m < \sqrt[4]{2^9}$. B. $-\sqrt[4]{2^9} < m < \sqrt[4]{2^9}$.
C. Không có giá trị của m . D. $1 < m < \sqrt[4]{2^9}$.



Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f(x^2 - 1) - 5 = 0$ là

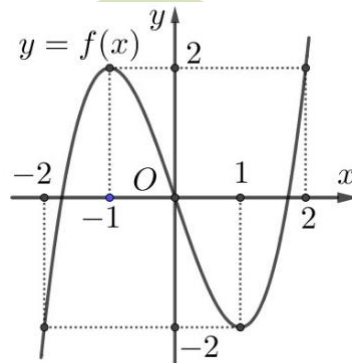


- A. 3. B. 2. C. 6. D. 4.

Câu 10. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3$ có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \leq 3$. Số phần tử của S bằng

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 0$ bằng



- A. 7. B. 3. C. 5. D. 9.

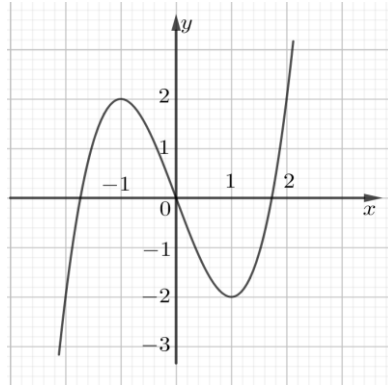
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	1	2	1	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A. $m \in (1; 2]$. B. $m \in [1; 2)$. C. $m \in (1; 2)$. D. $m \in [1; 2]$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây.



Số nghiệm phân biệt của phương trình $f(f(x)) + 1 = 0$ là

- A. 9. B. 8. C. 10. D. 7.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3|f(3-2x)| - 10 = 0$ là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-			-	0	+
y	$+\infty$			$+\infty$		3	$+\infty$

Arrows indicate the function's behavior: from $+\infty$ at $x = -\infty$ down to $-\infty$ at $x = 0$, and from $+\infty$ at $x = 0$ down to a local minimum at $y = 3$ when $x = 1$, then up to $+\infty$ at $x = +\infty$.

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 15. Cho phương trình $(m+2)\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} + 3x + 4\sqrt{4-x^2} = m+12$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt là

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 5.

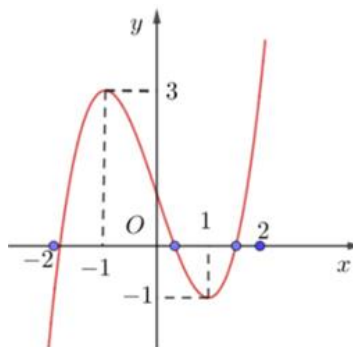
Câu 16. Số giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để phương trình $4^{x^2-2x+1} - m \cdot 2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt là

- A. 2017. B. 2016. C. 4035. D. 4037.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $y = 2m - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = |x|^3 - 3|x| + 1$ tại 4 điểm phân biệt

- A. $0 \leq m \leq 1$. B. $m \geq 1$. C. $0 < m < 1$. D. $m < 0$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(2) = 3$ và có đồ thị như hình vẽ bên



Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để phương trình $f(|x| + m) = 3$ có 4 nghiệm thực phân biệt.



A. 2.

B. 18.

C. 4.

D. 19.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|) + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

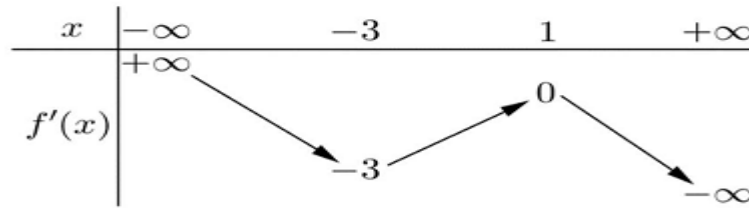
A. 3.

B. 10.

C. 4.

D. 6

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên



Bất phương trình $f(\sin x) < -3x + m$ đúng với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m \geq f(1) + \frac{3\pi}{2}$. B. $m > f(-1) - \frac{3\pi}{2}$. C. $m > f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3\pi}{2}$. D. $m > f(1) + \frac{3\pi}{2}$.

Câu 21. Cho hàm số $(C): y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$ và đường thẳng $d: y = 2m - m^2$. Tìm số giá trị của tham số thực m để đường thẳng d và đồ thị (C) có hai điểm chung.

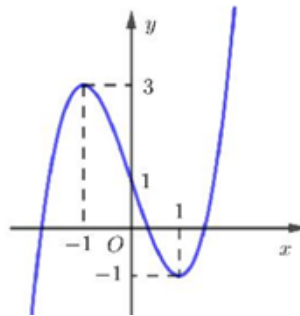
A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. Vô số.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f(\sin x) = 2\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng:



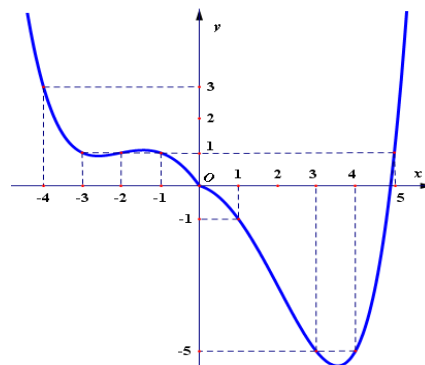
A. -10

B. -8.

C. -6.

D. -5.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}\right) = m - 2019$ có nghiệm.



A. 15.

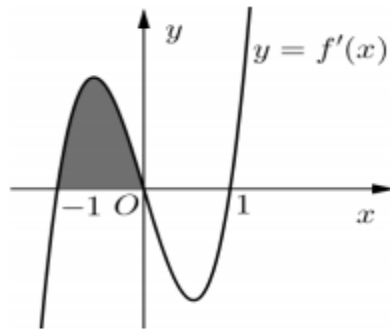
B. 14.

C. 10.

D. 13.



- Câu 24.** Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng diện tích phần tô đậm bằng $\frac{1}{8}$. Phương trình $8f(x) + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

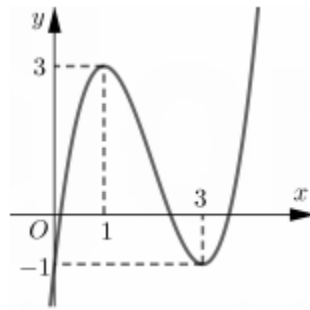


- A. 0. B. 4. C. 3. D. 2.

- Câu 25.** Phương trình $(2x^2 + 1)\sqrt{x-1} - \frac{11}{3x-4} + \frac{1}{2-x} = 11$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

- Câu 26.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.

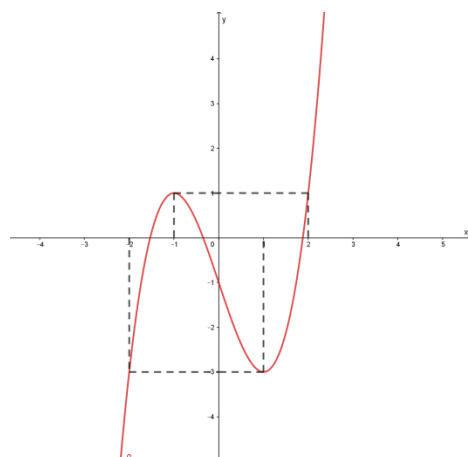


Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x+m|) = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

- Câu 27.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 6. B. 5. C. 7. D. 4.

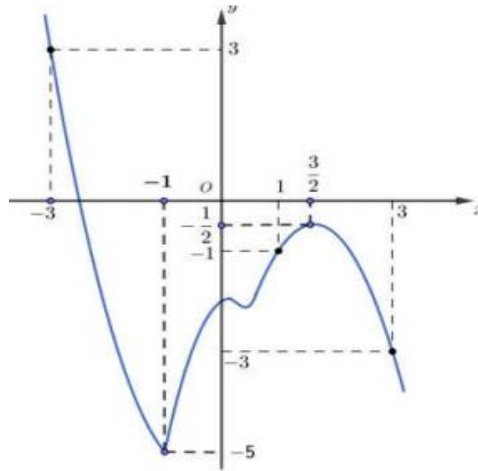




Câu 28. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$. Số nghiệm của phương trình $[f(x)]^3 - 3f(x) + 1 = 0$ là:

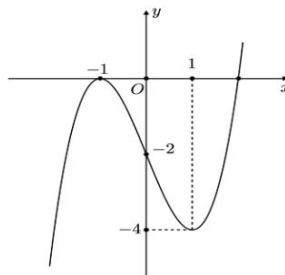
- A. 1. B. 6. C. 5. D. 7.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}) + 1 + m^2 = 0$ có nghiệm là



- A. 6. B. 4. C. 5. D. 7.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(1 - 2\cos x) + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là



- A. $[-4; 0]$. B. $[-4; 0)$. C. $[0; 4)$. D. $(0; 4)$.

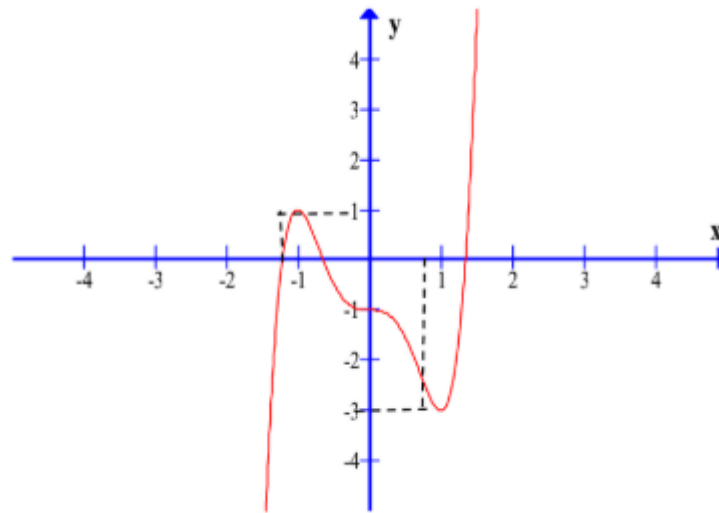
Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Số các số nguyên m thỏa mãn phương trình $f(3\sin x + 4\cos x + 5) = m$ có nghiệm là

x	$-\infty$		-10		0		10		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$								$+\infty$

Arrows indicate the function values at the critical points: $y \rightarrow 0$ at $x = -10$, $y \rightarrow 10000$ at $x = 0$, and $y \rightarrow 0$ at $x = 10$.

- A. 10001. B. 20000. C. 20001. D. 10000.

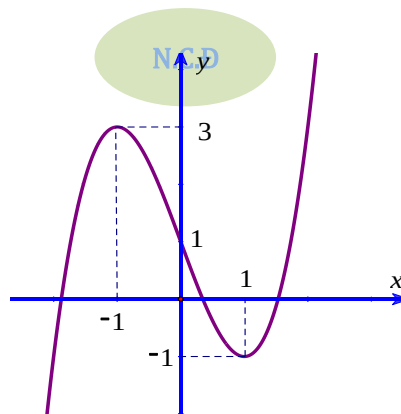
Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x| - 1) = m$ có 4 nghiệm phân biệt?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(\cos x) = -2m + 1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là

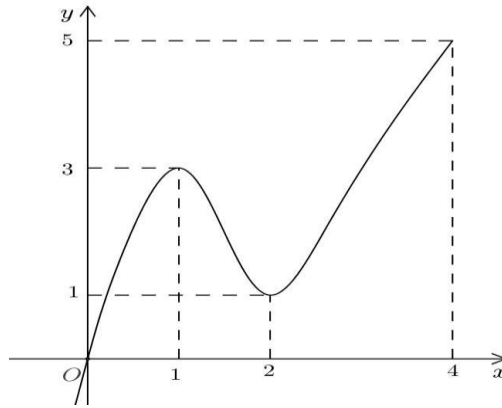


- A. $(-1; 1]$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(0; 1]$.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(2\sin x + 1) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{6}\right)$ là:

- A. $-2; 0$. B. $0; 2$.
C. $-2; 2$. D. $-2; 0$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left[4(\sin^4 x + \cos^4 x)\right] = m$ có nghiệm?

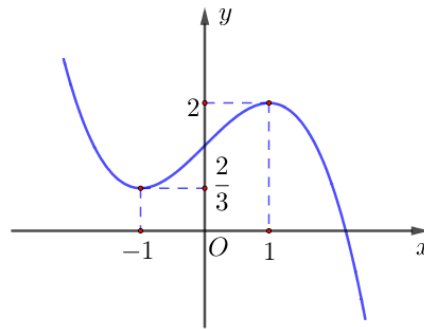


- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 36. Cho đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3mx^2 - m - 6$ (m là tham số) cắt trục hoành tại đúng một điểm khi giá trị của m là

- A. $m = 0$. B. $-6 < m < 2$. C. $0 \leq m < 2$. D. $-6 < m \leq 0$.

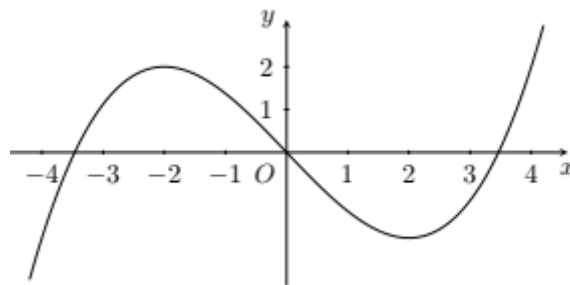
Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x^2 - 4x + 5) + 1 = m$ có nghiệm là

- A. 3. B. 4. C. 0. D. Vô số.

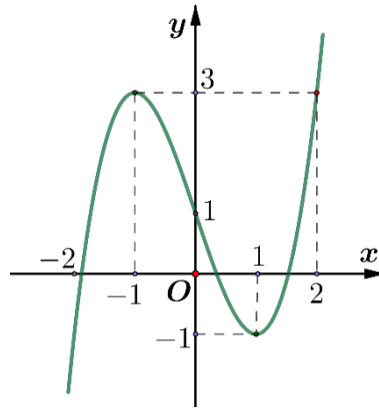
Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ của phương trình $f(2\sin x + 2) = 1$ là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

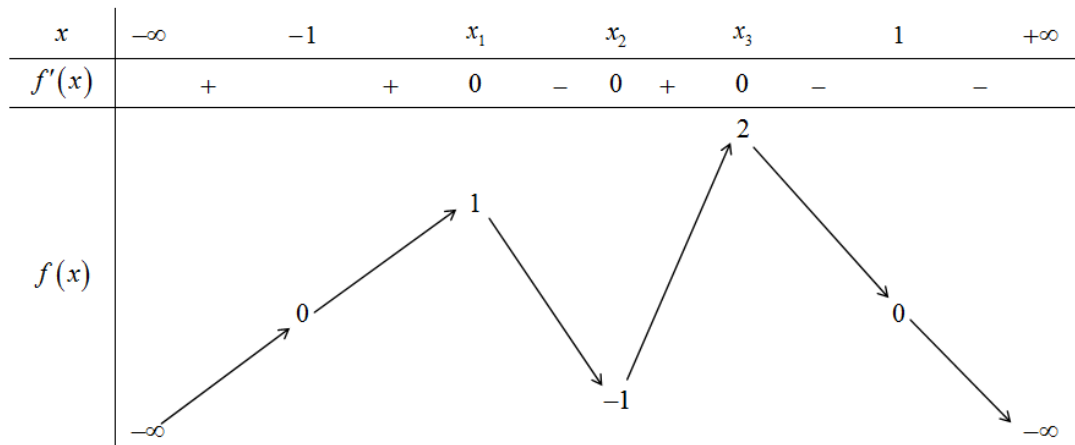
Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(\sqrt{4-x^2}) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[-\sqrt{2}; \sqrt{3})$ là

- A. $(-1; 3]$. B. $(-1; f(\sqrt{2})]$. C. $[-1; 3]$. D. $[-1; f(\sqrt{2})]$.

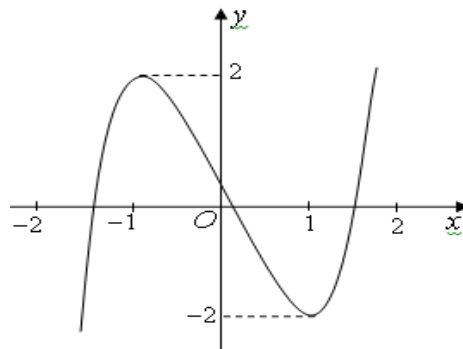
Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây:



Để phương trình $3f(2x-1) = m-2$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 1]$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -3)$ B. $(1; 6)$ C. $(6; +\infty)$ D. $(-3; 1)$

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ:



Phương trình $f(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 3. B. 7. C. 9. D. 5.

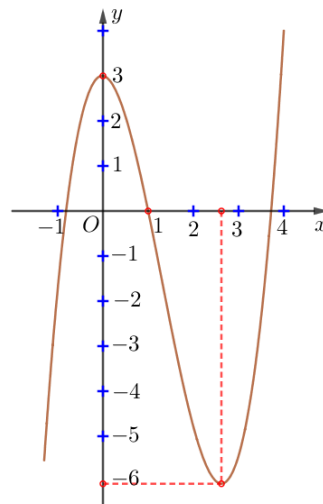
Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(0) < \frac{7}{6}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\frac{15}{13}$	$\searrow$	$-\infty$
		1				

Giá trị lớn nhất của tham số m để phương trình $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) - \frac{1}{2}} = m$ có nghiệm trên đoạn $[0; 2]$ là

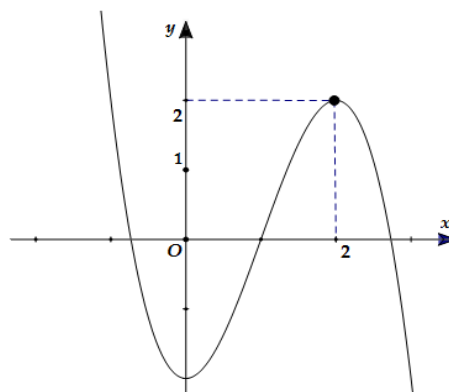
- A. e^2 . B. $e^{\frac{15}{13}}$. C. e^4 . D. e^3 .

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



- A. 2. B. 8. C. 4. D. 6.

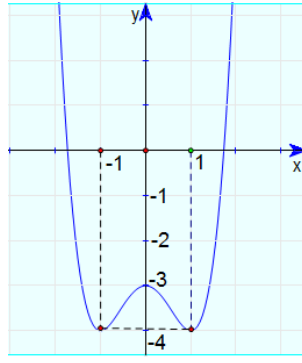
Câu 44. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm của phương trình $|x^3 - 3x^2 + 2| = 1$ là

- A. 3. B. 4. C. 6. D. 5.

Câu 45. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 2m - 4$ có hai nghiệm phân biệt?



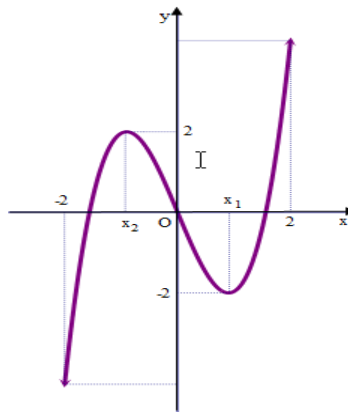
A. $m \leq \frac{1}{2}$.

B. $\begin{cases} m < 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$.

C. $0 < m < \frac{1}{2}$.

D. $\begin{cases} m = 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $|f(x) - 1| = 2$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2; 2]$.



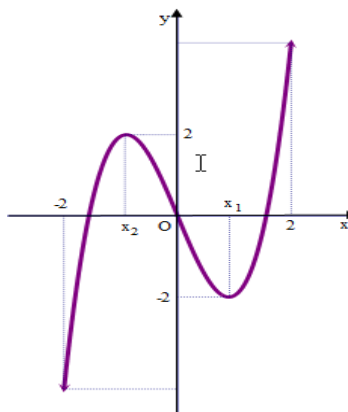
A. 2.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(|x|) = -1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2; 2]$.



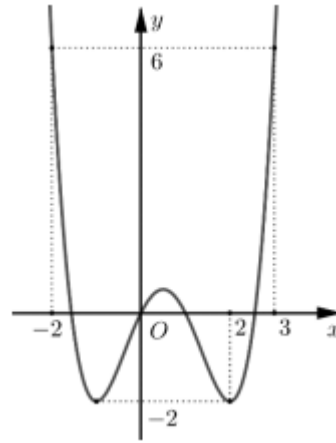
A. 2.

B. 5.

C. 4.

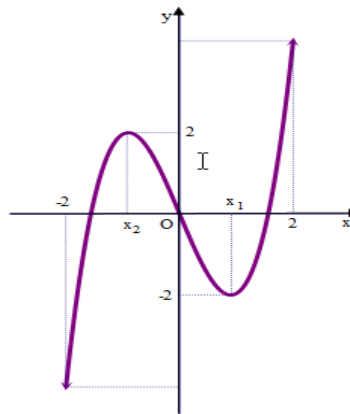
D. 3.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



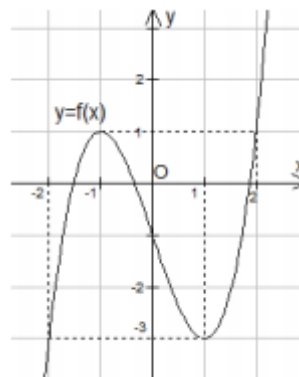
- A. 3. B. 2. C. 6. D. 7.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $|f(|x|) - 1| = 2$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2; 2]$.



- A. 6. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(2\sin x) = m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ khi và chỉ khi



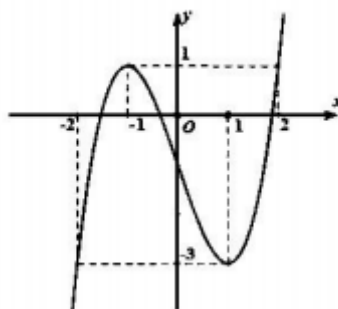
- A. $m \in \{-3; 1\}$. B. $m \in (-3; 1)$. C. $m \in [-3; 1)$. D. $m \in (-3; 1]$.

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $|f(x) - 1| = 2 - x$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2; 2]$.

- A. 2. B. 5. C. 4. D. 3.



Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6.

B. 5.

C. 7.

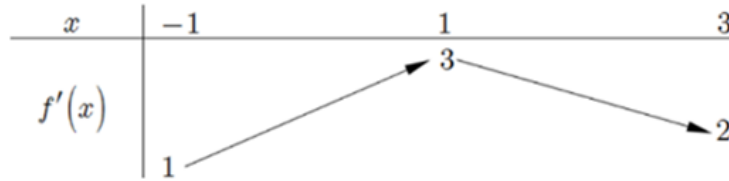
D. 4.

N.C.Đ



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới



Tìm m để bất phương trình $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$.

A. $m < f(0)$.

B. $m \leq f(0)$.

C. $m \leq f(3)$.

D. $m < f(1) - \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow m \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

Đặt $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

Ta có $g'(x) = f'(x) + x^2 - 2x = f'(x) - (-x^2 + 2x)$.

N.C.Đ

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x^2 + 2x$.

Mà $f'(x) > 1, \forall x \in (0; 3)$ và $-x^2 + 2x = 1 - (x-1)^2 \leq 1, \forall x \in (0; 3)$ nên $g'(x) > 0, \forall x \in (0; 3)$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$:

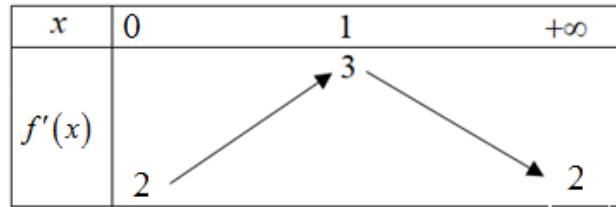
x	0	3
$g'(x)$		+
$g(x)$		

Bất phương trình $m \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$

$\Leftrightarrow m \leq g(0) \Leftrightarrow m \leq f(0)$.

NHẬN XÉT: Bài toán xây dựng dựa trên ý tưởng mối quan hệ giữa bảng biến thiên của $f'(x)$ hoặc đồ thị của $f'(x)$ so sánh với $h'(x)$ để suy ra sự biến thiên của hàm số có dạng $g(x) = f(x) - h(x)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới



Tìm m để bất phương trình $m + 2\sin x \leq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$.

- A. $m \geq f(0)$. B. $m \leq f(1) - 2\sin 1$. **C. $m \leq f(0)$.** D. $m \geq f(1) - 2\sin 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $m + 2\sin x \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq f(x) - 2\sin x$.

Đặt $g(x) = f(x) - 2\sin x$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2\cos x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2\cos x$.

Mà $f'(x) \geq 2, \forall x \in (0; +\infty)$ và $2\cos x \leq 2, \forall x \in (0; +\infty)$ nên $g'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 2 \\ 2\cos x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

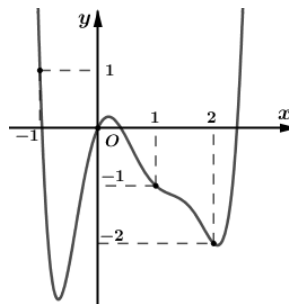
Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	+
$g(x)$		

Bất phương trình $m \leq 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m \leq g(0) \Leftrightarrow m \leq f(0).$$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Tìm m để bất phương trình $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$.

- A. $m \geq 2f(0) - 1$. **B. $m \leq 2f(0) - 1$.** C. $m \leq 2f(-1)$. D. $m \geq 2f(-1)$.

Lời giải

Chọn B

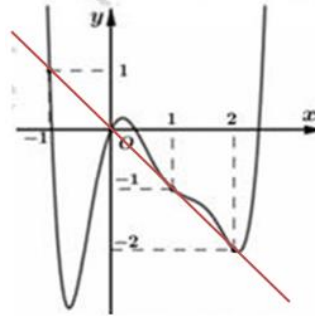
Ta có $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3 \Leftrightarrow m \leq 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$.

Đặt $g(x) = 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$. Ta có $g'(x) = 2f'(x+2) + 2x + 4$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2)$.

Đặt $t = x+2$ ta được $f'(t) = -t$. (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng $d : y = -t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y = -t$ ta có

$$\text{ta có } f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases} \cdot \text{N.C.Đ}$$

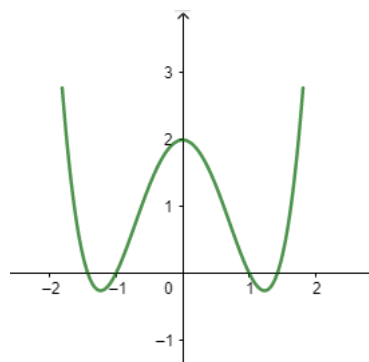
Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Bất phương trình $m \leq 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m \leq g(-2) \Leftrightarrow m \leq 2f(0) - 1.$$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau.



Số nghiệm thực của phương trình $f^2(x) - 1 = 0$ là

A. 7.

B. 4.

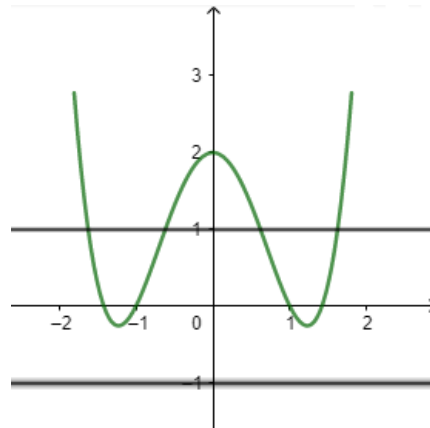
C. 3.

D. 8.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có: $f^2(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -1 \end{cases}$



Dựa vào đồ thị, ta thấy phương trình $f(x) = 1$ có 4 nghiệm thực và phương trình $f(x) = -1$ vô nghiệm.

Vậy phương trình $f^2(x) - 1 = 0$ có 4 nghiệm thực.

Câu 5. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(2 + \sqrt{3})^x - m(2 - \sqrt{3})^x = 10$ có 2 nghiệm dương phân biệt. Số phần tử của S bằng

A. 12.

B. 15.N.C. **C. 9.**

D. 4.

Lời giải**Chọn B**

Xét phương trình $(2 + \sqrt{3})^x - m(2 - \sqrt{3})^x = 10$. (1)

Đặt $t = (2 + \sqrt{3})^x$. Khi đó $(2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t}$ và phương trình (1) trở thành phương trình

$$t - m \cdot \frac{1}{t} = 10 \Leftrightarrow t^2 - 10t = m. \quad (2)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Bảng biến thiên của hàm số $y = t^2 - 10t$:

t	$-\infty$	1	5	$+\infty$
y	$+\infty$	-9	-25	$+\infty$

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi $-25 < m < -9$.

Vậy $S = \{-24; -23; \dots; -10\}$ và $n(S) = 15$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		1		0		$+\infty$

Khi đó phương trình $f(x)+1=m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A. $1 < m < 2$.

B. $1 \leq m \leq 2$.

C. $0 \leq m \leq 1$.

D. $0 < m < 1$.

Lời giải

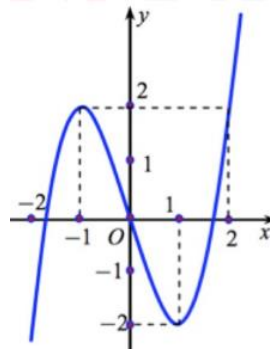
Chọn A

Ta có: $f(x)+1=m \Leftrightarrow f(x)=m-1$ (*).

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m-1$.

Dựa vào bảng biến thiên, đường thẳng $y=m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt khi $0 < m-1 < 1 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{2f(\cos x)})=m$ có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \cos x \in (-1; 0]$, $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow u = \sqrt{2f(\cos x)} \in [0; 2)$.

Phương trình trở thành: $f(u)=m$ (*). Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại các điểm có hoành độ $\in [0; 2)$.

Dựa vào đồ thị suy ra $-2 \leq m < 2$. Vì m nguyên nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Nhận xét: Bài này là tương giao đồ thị hàm hợp.

Câu 8. Tìm m để phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = \log_2 m$ có 8 nghiệm phân biệt:

A. $0 < m < \sqrt[4]{2^9}$.

B. $-\sqrt[4]{2^9} < m < \sqrt[4]{2^9}$.

C. Không có giá trị của m .

D. $1 < m < \sqrt[4]{2^9}$.

Lời giải

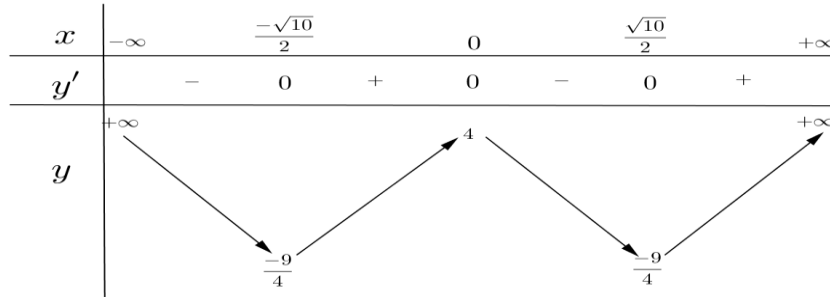
Chọn D

Xét hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ có

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

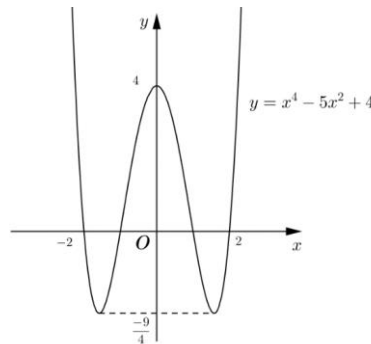
$$y' = 4x^3 - 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 4$ và $x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow y = -\frac{9}{4}$



BBT

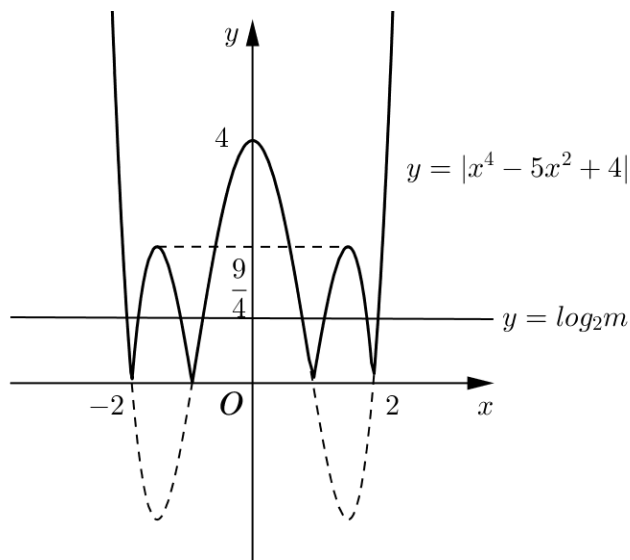
Đồ thị



Từ đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$

Bước 1: Ta giữ nguyên phần đồ thị phía trên trục hoành.

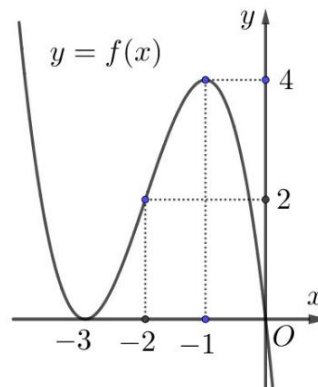
Bước 2: Lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của đồ thị lên phía trên trục hoành và xóa bỏ đi phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành ta được đồ thị hàm số $y = |x^4 - 5x^2 + 4|$.



Khi đó số nghiệm của phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = \log_2 m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^4 - 5x^2 + 4|$ và đường thẳng $y = \log_2 m$ với $m > 0$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = |x^4 - 5x^2 + 4|$ ta thấy để phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = \log_2 m$ có 8 nghiệm thì:

$$0 < \log_2 m < \frac{9}{4} \Leftrightarrow 1 < m < \sqrt[4]{2^9}.$$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f(x^2 - 1) - 5 = 0$ là



A. 3.

B. 2.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

N.C.Đ

Chọn B

$$2f(x^2 - 1) - 5 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 - 1 \quad (t \geq -1)$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành } 2f(t) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = a & (a < -3) & (l) \\ t = b & (b \in (-2; -1)) & (l) \\ t = c & (c \in (-1; 0)) & (tm) \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{c+1}$$

Vậy số nghiệm thực của phương trình (1) là 2.

Câu 10. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3$ có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \leq 3$. Số phần tử của S bằng

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f'(x) = x^2 - 4x + m.$$

Để hàm số có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \leq 3$ cần $f'(x) = x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2 \leq 3$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + m = 0 \text{ có hai nghiệm: } x_1 < x_2 \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{-b}{2a} < 3 \\ 1.f'(3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ 2 < 3 \\ m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq m < 4.$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 3$.

Vậy số phần tử của S bằng 1.

Cách 2.

Ta có $f'(x) = x^2 - 4x + m$.

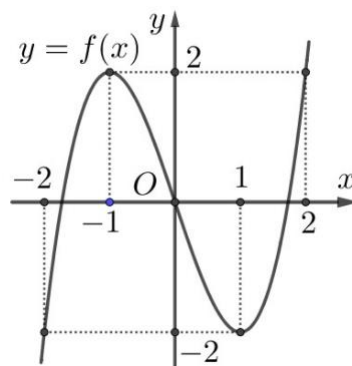
Để hàm số có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \leq 3$ cần $f'(x) = x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2 \leq 3$

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $(C): y = -x^2 + 4x$ cắt đường thẳng $(d): y = m$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn hoặc bằng 3.

$y' = -2x + 4$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Ta có bảng biến thiên:

Dựa vào bảng biến thiên: YCBT $\Leftrightarrow 3 \leq m < 4$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 0$ bằng



A. 7.

B. 3.

C. 5.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = f(x)$ ($t \in \mathbb{R}$), phương trình $f(f(x)) = 0$ trở thành $f(t) = 0$.

Qua đồ thị hàm số $y = f(x)$ đã cho ta thấy: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $a, 0, b$ với $a \in (-2; -1)$, $b \in (1; 2)$.

Khi đó: $f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \\ t = 0 \\ t = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = 0 \\ f(x) = b \end{cases}$. Nhận thấy mỗi đường thẳng trong 3 đường

thẳng $y = a$ với $a \in (-2; -1)$; $y = 0$; $y = b$ với $b \in (1; 2)$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ lần lượt tại 3 điểm phân biệt và 9 điểm này có hoành độ khác nhau.

Vậy phương trình $f(f(x)) = 0$ có 9 nghiệm thực phân biệt.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	1	2	1	$+\infty$		

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m \in (1; 2]$.

B. $m \in [1; 2)$.

C. $m \in (1; 2)$.

D. $m \in [1; 2]$.

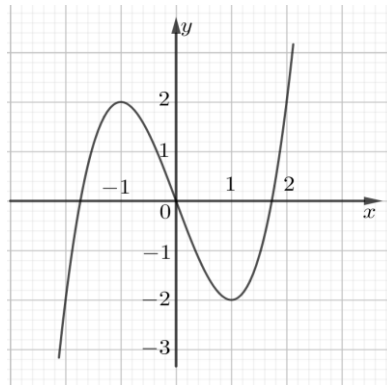
Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$ (*). Phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = m$ tại 4 điểm phân biệt.

Theo bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = m$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $1 < m < 2$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây.



Số nghiệm phân biệt của phương trình $f(f(x)) + 1 = 0$ là

A. 9.

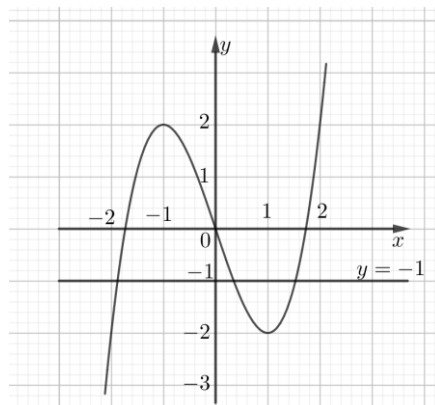
B. 8.

C. 10.

D. 7.

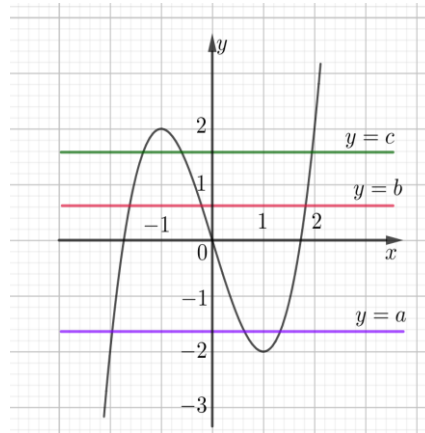
Lời giải

Chọn A





$$\text{Xét } f(f(x)) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a & (-2 < a < -1) \\ f(x) = b & (0 < b < 1) \\ f(x) = c & (1 < c < 2) \end{cases}.$$



Xét $f(x) = a$ ($-2 < a < -1$): Dựa vào đồ thị ta thấy $y = a$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt (1).

Xét $f(x) = b$ ($0 < b < 1$): Dựa vào đồ thị ta thấy $y = b$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt (2).

Xét $f(x) = c$ ($1 < c < 2$): Dựa vào đồ thị ta thấy $y = c$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt (3).

N.C.Đ

Các nghiệm ở trên không có nghiệm nào trùng nhau nên (*) có 9 nghiệm phân biệt

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3|f(3-2x)| - 10 = 0$ là

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	$+\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$

Arrows indicate the function decreases from $+\infty$ to $-\infty$ as x increases from $-\infty$ to 0, and increases from $+\infty$ to $+\infty$ as x increases from 0 to $+\infty$, with a local minimum at x=1, y=3.

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

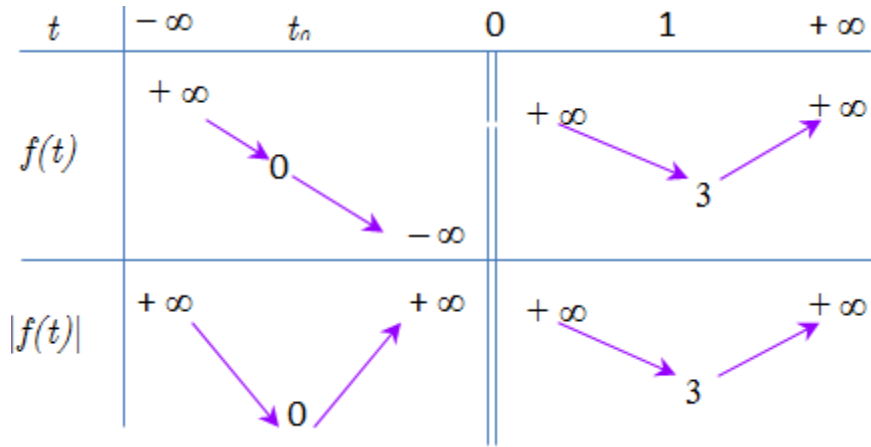
Lời giải

Chọn C

Đặt $3-2x = t$ phương trình đã cho trở thành $3|f(t)| - 10 = 0 \Leftrightarrow |f(t)| = \frac{10}{3}$. (*)

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ và đường thẳng $y = \frac{10}{3}$ song song hoặc trùng với trục hoành.

Từ bảng biến thiên đã cho ta vẽ được bảng biến thiên của hàm số $y = |f(t)|$.



Dựa vào BBT ta thấy phương trình (*) có 4 nghiệm.

Do hàm số $t = 3 - 2x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên số nghiệm t của phương trình (*) bằng số nghiệm x của phương trình đã cho. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 15. Cho phương trình $(m+2)\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} + 3x + 4\sqrt{4-x^2} = m+12$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$.

Đặt $t = \sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} \Rightarrow 3x + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - t^2$.

Xét hàm $g(x) = \sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x}$, $x \in [-2; 2]$.

Ta có $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} + \frac{1}{\sqrt{2-x}} > 0, \forall x \in (-2; 2)$.

Bảng biến thiên

x	-2	2
$g'(x)$		+
$g(x)$	-4	2

Ứng với mỗi giá trị $t \in [-4; 2]$ ta có 1 giá trị $x \in [-2; 2]$.

Phương trình đã cho có dạng $(m+2)t + 10 - t^2 = m+12$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t + 2 = (t-1)m$ (1)

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm t phân biệt thuộc đoạn $[-4; 2]$.

+ Với $t = 1$ ta thấy không tồn tại giá trị m .

+ Với $t \neq 1$ phương trình (1) tương đương $m = \frac{t^2 - 2t + 2}{t-1} = t-1 + \frac{1}{t-1}$.

Xét hàm $f(t) = t-1 + \frac{1}{t-1}$, $t \in [-4; 2] \setminus \{1\}$.



Ta có $f'(t) = 1 - \frac{1}{(t-1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (tm)} \\ t = 2 \text{ (tm)} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-4		0		1		2	$+\infty$
$f'(t)$			+	0	-		-	0	
$f(t)$									

$-\frac{26}{5}$ $\rightarrow$ -2 $\rightarrow$ $+\infty$
 2

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-\frac{26}{5} \leq m < -2$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-5; -4; -3\}$. Vậy có 3 giá trị m nguyên thỏa đề bài.

Câu 16. Số giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để phương trình

$$4^{x^2-2x+1} - m \cdot 2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0 \text{ có bốn nghiệm phân biệt là}$$

A. 2017.

B. 2016.

C. 4035.

D. 4037.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

+) Ta có $4^{x^2-2x+1} - m \cdot 2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2(x^2-2x+1)} - 2m \cdot 2^{x^2-2x+1} + 3m - 2 = 0$. (1)

Đặt $t = 2^{x^2-2x+1}$. Ta có $t = 2^{x^2-2x+1} = 2^{(x-1)^2} \geq 2^0 = 1, \forall x$. Suy ra $t \geq 1$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2m \cdot t + 3m - 2 = 0$. (2)

+) Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai

$$\text{nghiệm phân biệt } t_1, t_2 \text{ thỏa mãn } t_1 > t_2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \\ t_1 + t_2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 > 0 \\ t_1 + t_2 > 2 \end{cases}.$$

(3)

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 t_2 = 3m - 2 \end{cases}$.

+) Khi đó (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 3m - 2 - 2m + 1 > 0 \\ 2m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \Leftrightarrow m > 2 \\ m > 1 \end{cases}$.

Mà m nguyên và $m \in (-2019; 2019)$ nên ta có $m \in \{3; 4; \dots; 2018\}$.

Vậy có 2016 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Cách 2:



+) Ta có $4^{x^2-2x+1} - m \cdot 2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2(x^2-2x+1)} - 2m \cdot 2^{x^2-2x+1} + 3m - 2 = 0$. (1)

Đặt $t = 2^{x^2-2x+1}$. Ta có $t = 2^{x^2-2x+1} = 2^{(x-1)^2} \geq 2^0 = 1, \forall x$. Suy ra $t \geq 1$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2mt + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow (2t - 3) \cdot m = t^2 - 2$ (2).

Vì $t = \frac{3}{2}$ không là nghiệm của (2) nên (2) $\Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2}{2t - 3}$ (*).

Xét hàm số $y = \frac{t^2 - 2}{2t - 3}$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

$$y' = \frac{2t^2 - 6t + 4}{(2t - 3)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
y'	1	-	+	+
y		$-\infty$	2	$+\infty$

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1

$\Leftrightarrow m > 2$.

N.C.Đ

Mà m nguyên và $m \in (-2019; 2019)$ nên ta có $m \in \{3; 4; \dots; 2018\}$.

Vậy có 2016 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $y = 2m - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = |x|^3 - 3|x| + 1$ tại 4 điểm phân biệt

A. $0 \leq m \leq 1$.

B. $m \geq 1$.

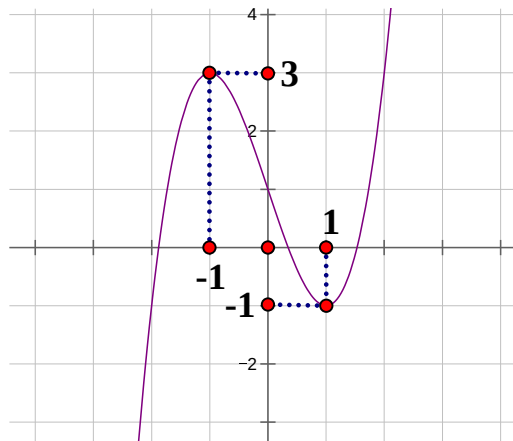
C. $0 < m < 1$.

D. $m < 0$.

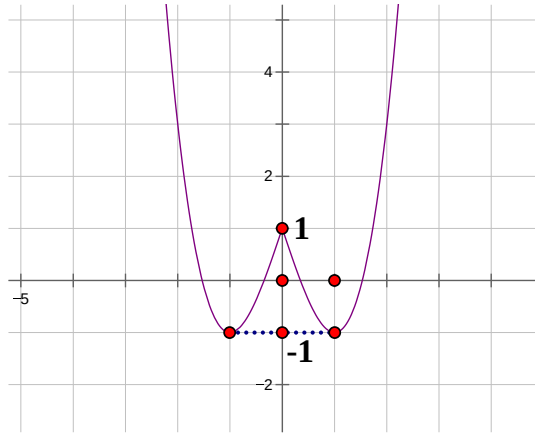
Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ là đồ thị bên dưới



Từ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ suy ra đồ thị hàm số $y = |x|^3 - 3|x| + 1$ là đồ thị bên dưới

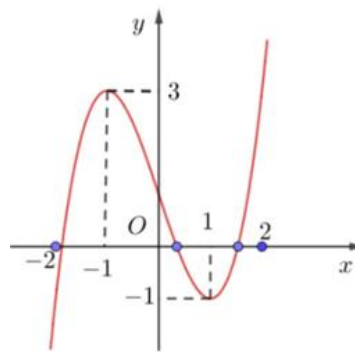


Dựa vào đồ thị hàm số $y = |x|^3 - 3|x| + 1$ và đồ thị hàm số $y = 2m - 1$

Ta có: đường thẳng $y = 2m - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = |x|^3 - 3|x| + 1$ tại 4 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow -1 < 2m - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$$

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(2) = 3$ và có đồ thị như hình vẽ bên



Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để phương trình $f(|x| + m) = 3$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

A. 2.

B. 18.

C. 4.

D. 19.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f(|x| + m) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + m = -1 \\ |x| + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = -1 - m \\ |x| = 2 - m \end{cases}.$$

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - m > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Rightarrow m < -1 \Rightarrow m \in \{-19, \dots, -2\}.$$

Vậy có tất cả 18 số nguyên thỏa mãn.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|) + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. 3.

B. 10.

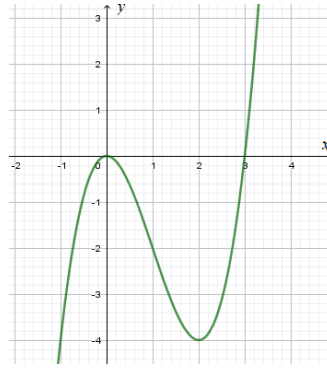
C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$. Ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ như sau:



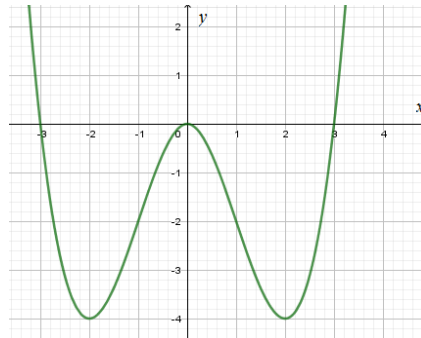
Như ta đã biết: để vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ từ đồ thị $y = f(x)$ ta thực hiện:

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị $y = f(x)$ gồm các điểm bên phải và các điểm nằm trên trục Oy ; bỏ phần đồ thị bên trái trục Oy . Ta được phần đồ thị P_1

Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị P_1 qua trục Oy ta được phần đồ thị P_2

Khi đó: Đồ thị $y = f(|x|)$ bao gồm đồ thị P_1 và P_2 .

Từ đó ta có đồ thị hàm số $y = f(|x|) = |x|^3 - 3|x|^2$ như sau:



Để đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|) + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì phương trình $g(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt. Do đó phương trình $f(|x|) = -m$ có 4 nghiệm phân biệt hay đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(|x|) = |x|^3 - 3|x|^2$ tại 4 điểm phân biệt.

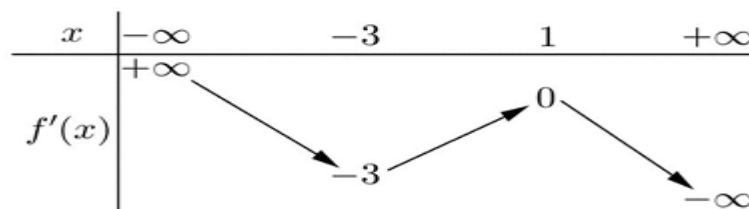
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ suy ra bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi

$$-4 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Kết hợp yêu cầu đề bài $m \in \mathbb{Z}$, do đó $m \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của m thỏa mãn là: $1 + 2 + 3 = 6$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên



Bất phương trình $f(\sin x) < -3x + m$ đúng với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m \geq f(1) + \frac{3\pi}{2}$.

B. $m > f(-1) - \frac{3\pi}{2}$.

C. $m > f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3\pi}{2}$.

D. $m > f(1) + \frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(\sin x) < -3x + m, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow m > g(x) = 3x + f(\sin x), \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

$$g'(x) = 3 + \cos x \cdot f'(\sin x).$$

Do $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $-1 < \sin x < 1$, kết hợp với BBT của $f'(x)$ ta có $0 < -f'(\sin x) < 3$.

Ta lại có $0 < \cos x \leq 1$ nên $0 < -\cos x < 3$.

Suy ra $3 + \cos x \cdot f'(\sin x) > 0$

Do đó hàm $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow g(x) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(1) + \frac{3\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow m > g(x) = 3x + f(\sin x), \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow m \geq g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(1) + \frac{3\pi}{2}.$$

Câu 21. Cho hàm số $(C): y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$ và đường thẳng $d: y = 2m - m^2$. Tìm số giá trị của tham số thực m để đường thẳng d và đồ thị (C) có hai điểm chung.

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. Vô số.

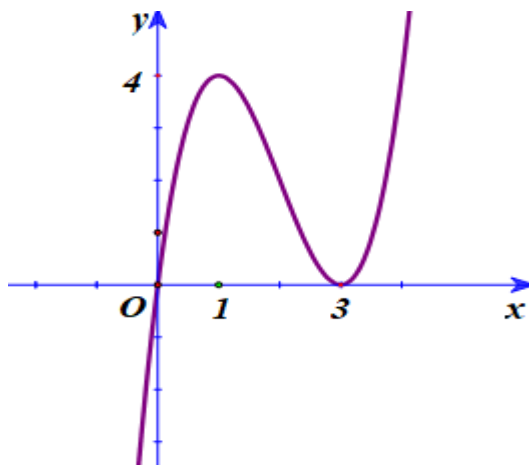
Lời giải

Chọn C

Xét $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$

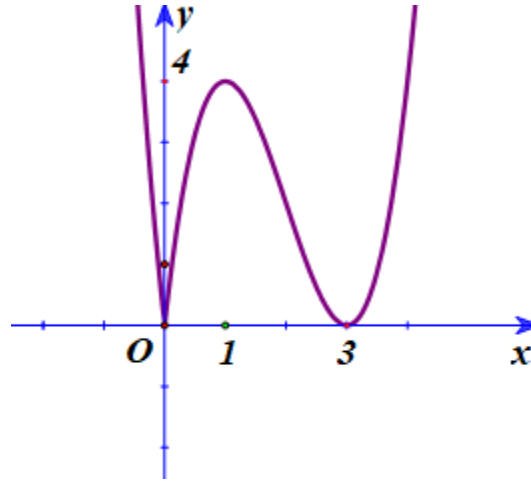


Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ gồm hai phần:

Phần 1. Giữ nguyên phần đồ thị nằm phía trên trục hoành.



Phần 2. Lấy đối xứng phần nằm dưới trục hoành qua trục hoành.



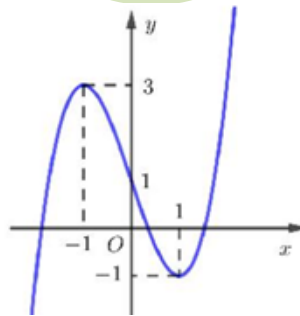
Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng d và đồ thị (C) có hai điểm chung khi

$$2m - m^2 = 0 \text{ hoặc } 2m - m^2 > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases} \text{ hoặc } m^2 - 2m + 4 < 0 \text{ (vô nghiệm vì}$$

$$m^2 - 2m + 4 = (m-1)^2 + 3 > 0, \forall m \in \mathbb{R})$$

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f(\sin x) = 2\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng:



A. -10

B. -8.

C. -6.

D. -5.

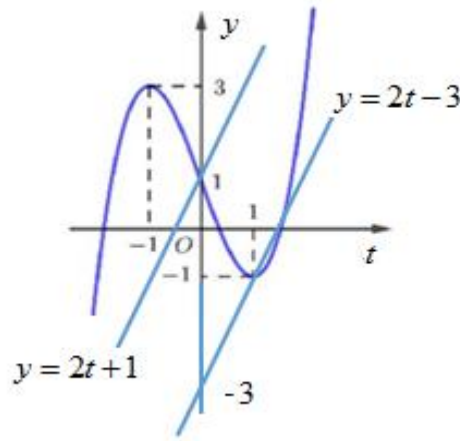
Lời giải.

Chọn C

Đặt $t = \sin x$ với $x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Xét phương trình $f(t) = 2t + m$.

Để phương trình có nghiệm thì đồ thị hàm $y = f(t)$ cắt đồ thị hàm số $y = 2t + m$ tại ít nhất một điểm có hoành độ t thuộc $(0; 1]$.

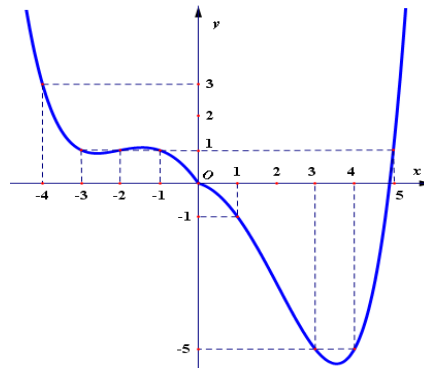


Từ đồ thị ta suy ra đồ thị hàm số $y = 2t + m$ nằm ở phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị 2 hàm số $y = 2t + 1$ và $y = 2t - 3$.

Từ đó suy ra $-3 \leq m < 1 \Rightarrow m = -3; -2; -1; 0$.

Vậy tổng các phần tử bằng -6 .

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}\right) = m - 2019$ có nghiệm.



A. 15.

B. 14.

C. 10.

D. 13.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \in \left[1; \frac{7}{3}\right]$.

Xét phương trình: $2.f\left(3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}\right) = m - 2019$ (1).

Ta có : $-9x^2 + 30x - 21 = 4 - (3x - 5)^2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{4 - (3x - 5)^2} \leq 2 \Rightarrow -3 \leq 3 - 3\sqrt{4 - (3x - 5)^2} \leq 3$.

Đặt $t = 3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}$, $t \in [-3; 3]$.

Khi đó, phương trình (1) trở thành: $2.f(t) = m - 2019 \Leftrightarrow f(t) = \frac{m - 2019}{2}$ (2).

Phương trình (1) có nghiệm $x \in \left[1; \frac{7}{3}\right] \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \in [-3; 3]$.

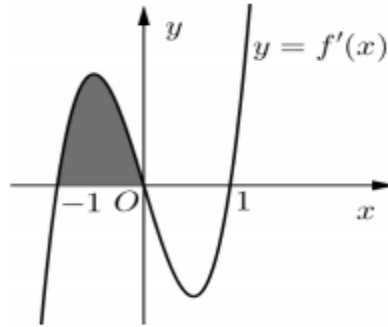
Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$, phương trình (2) có nghiệm $t \in [-3; 3]$ khi và chỉ khi $-5 \leq \frac{m - 2019}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 2009 \leq m \leq 2021$.



Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2009, 2010, \dots, 2021\}$.

Vậy số giá trị nguyên của m là: $2021 - 2009 + 1 = 13$.

- Câu 24.** Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng diện tích phần tô đậm bằng $\frac{1}{8}$. Phương trình $8f(x) + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 0.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Diện tích phần tô đậm là $S = \int_{-1}^0 f'(x) dx = \frac{1}{8} \Leftrightarrow f(x) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow f(0) - f(-1) = \frac{1}{8}$.

Mà $f(0) = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^2 = 0$.

N.C.Đ

Do đó $f(-1) = -\frac{1}{8} \Rightarrow f(1) = f(-1) = -\frac{1}{8}$ (do $f(x)$ là hàm số chẵn).

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	$+\infty$		

Ta có $8f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{8}$ (*).

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{1}{8}$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $8f(x) + 1 = 0$ có 2 nghiệm ($x = -1 \vee x = 1$).

- Câu 25.** Phương trình $(2x^2 + 1)\sqrt{x-1} - \frac{11}{3x-4} + \frac{1}{2-x} = 11$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x \neq \frac{3}{4} \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq \frac{3}{4} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } (2x^2+1)\sqrt{x-1} - \frac{11}{3x-4} + \frac{1}{2-x} = 11 \Leftrightarrow (2x^2+1)\sqrt{x-1} - \frac{11}{3x-4} + \frac{1}{2-x} - 11 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = (2x^2+1)\sqrt{x-1} - \frac{11}{3x-4} + \frac{1}{2-x} - 11 \text{ trên } [1; +\infty) \setminus \left\{\frac{3}{4}; 2\right\}$$

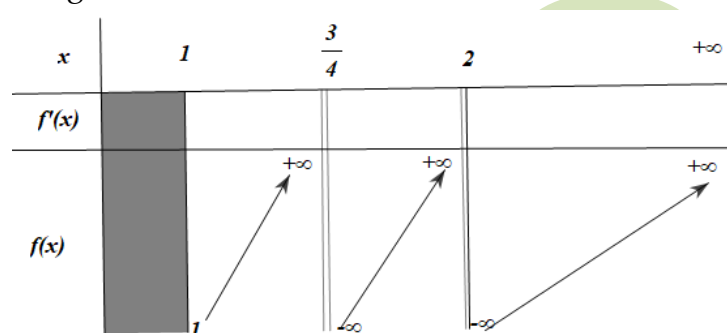
Nhận thấy, hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $\left[1; \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}; 2\right)$, $(2; +\infty)$

Ta có,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((2x^2+1)\sqrt{x-1} - \frac{11}{3x-4} + \frac{1}{2-x} - 11 \right)' = 4x\sqrt{x-1} + (2x^2+1) \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{33}{(3x-4)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} \\ &= \frac{10x^2-8x+1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{33}{(3x-4)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} > 0 \text{ với } \forall x \in [1; +\infty) \setminus \left\{\frac{3}{4}; 2\right\} \end{aligned}$$

Suy ra, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty) \setminus \left\{\frac{3}{4}; 2\right\}$.

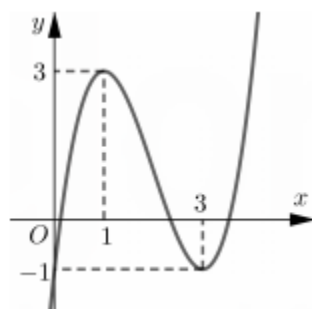
Bảng biến thiên



Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành.

Từ bảng biến thiên ta suy ra: Số nghiệm của phương trình (*) bằng 2.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x+m|) = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = |x+m|$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow f(t) = m$ (*).

Với $t = 0 \Leftrightarrow x = -m$; với $t > 0 \Leftrightarrow x = -m \pm t$.

Vậy phương trình có đúng 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có đúng 3 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow -1 < m < 3$, $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 0; 2\}$.

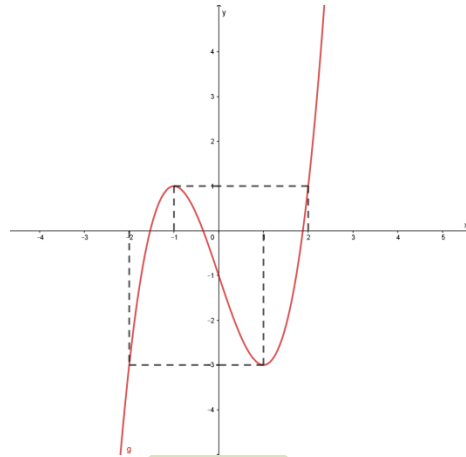
Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(f(x)-1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 4.



Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-2; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 2) \end{cases}$

Do đó $f(f(x)-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-1 = a(1) \\ f(x)-1 = b(2) \\ f(x)-1 = c(3) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow f(x) = a+1 \in (-1; 0)$

$\Rightarrow$ pt $f(x) = a+1$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < a < -1 < b < x_2 < 0 < x_3 < c$

(2) $\Leftrightarrow f(x) = b+1 \in (0; 1) \Rightarrow$ pt $f(x) = b+1$ có 3 nghiệm x_4, x_5, x_6 thỏa mãn

$x_1 < a < x_4 < -1 < x_5 < b < x_2 < 0 < x_3 < c < x_6$

(3) $\Leftrightarrow f(x) = c+1 \in (1; 3) \Rightarrow$ pt $f(x) = c+1$ có nghiệm duy nhất $x_7 > x_6$

Vậy phương trình $f(f(x)-1) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$. Số nghiệm của phương trình $[f(x)]^3 - 3f(x) + 1 = 0$ là:

A. 1.

B. 6.

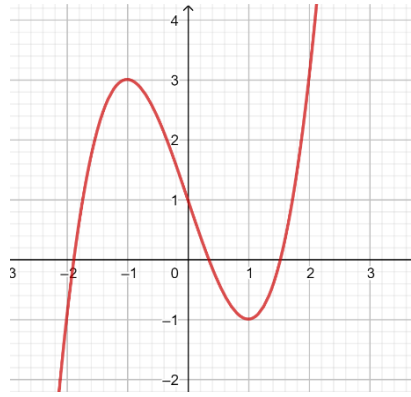
C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$ có dạng:



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm

$$x_1 \in (-2; -1), x_2 \in (0; 1), x_3 \in (1; 2)$$

Nếu phương trình $[f(x)]^3 - 3f(x) + 1 = 0$ có nghiệm x_0 thì $f(x_0) \in \{x_1, x_2, x_3\}$.

Dựa vào đồ thị ta có:

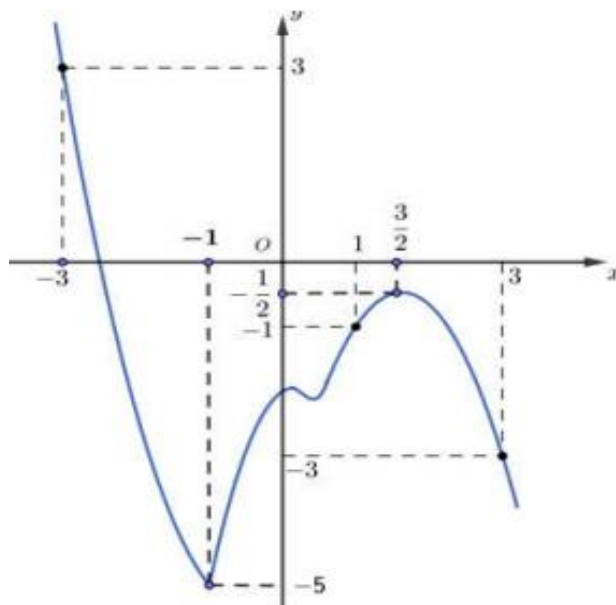
+ $f(x) = x_1, x_1 \in (-2; -1)$ có 1 nghiệm duy nhất.

+ $f(x) = x_2, x_2 \in (0; 1)$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ $f(x) = x_3, x_3 \in (1; 2)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $[f(x)]^3 - 3f(x) + 1 = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}) + 1 + m^2 = 0$ có nghiệm là



A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = 3 - 4\sqrt{6x - 9x^2} = 3 - 4\sqrt{1 - (3x - 1)^2} \Rightarrow t \in [-1; 3].$$

Dựa vào đồ thị ta có khi $t \in [-1; 3]$ thì $f(t) \in \left[-5; -\frac{1}{2}\right]$.

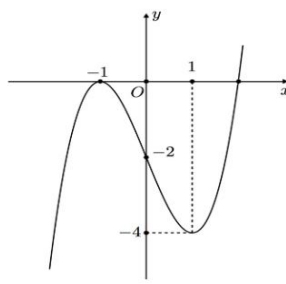
Khi đó phương trình $f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+1+m^2=0$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t)=-1-m^2$ có nghiệm thuộc $[-1; 3]$.

$$\Leftrightarrow -5 \leq -1-m^2 \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

Kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(1-2\cos x)+m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là



A. $[-4; 0]$.

B. $[-4; 0)$.

C. $[0; 4)$.

D. $(0; 4)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=1-2\cos x$, khi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $t \in [-1; 1]$.

Khi đó phương trình $f(1-2\cos x)+m=0$ trở thành phương trình $f(t)=-m$.

Như vậy để thỏa yêu cầu bài toán thì phương trình $f(t)=-m$ phải có nghiệm $t \in [-1; 1]$

.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $-4 < -m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m < 4$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây

Số các số nguyên m thỏa mãn phương trình $f(3\sin x+4\cos x+5)=m$ có nghiệm là

x	$-\infty$		-10		0		10		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$								$+\infty$

Arrows indicate the function values at the critical points: $+\infty \rightarrow 0 \rightarrow 10000 \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$.

A. 10001.

B. 20000.

C. 20001.

D. 10000.

Lời giải

Chọn A



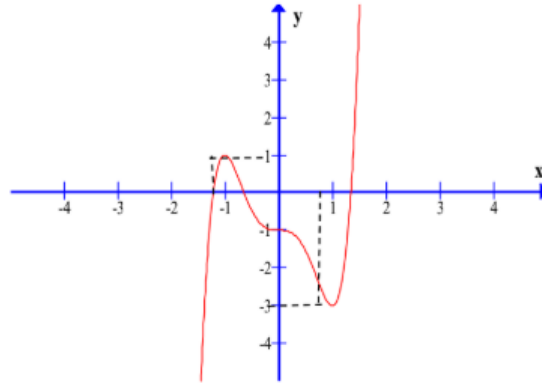
Đặt $t = 3\sin x + 4\cos x + 5 = 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right) + 5 = 5\sin(x + \alpha) + 5$ với $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = \frac{3}{5} \end{cases}$

Ta có: $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $-5 \leq 5\sin(x + \alpha) \leq 5, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra: $0 \leq t \leq 10, \forall x \in \mathbb{R}$

Phương trình đã cho trở thành: $f(t) = m$ với $t \in [0; 10]$

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 10000$ mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có 10001 giá trị nguyên m .

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x| - 1) = m$ có 4 nghiệm phân biệt?

A. 2.

B. 1.

N.C.Đ

C. 3.

D. 4.

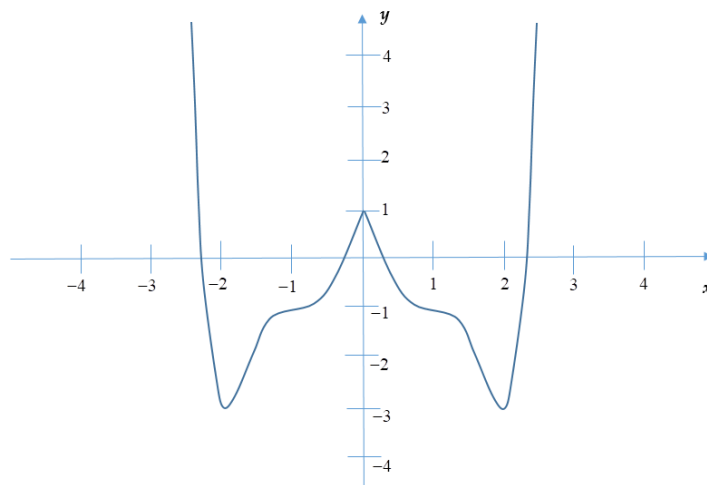
Lời giải

Chọn C

Đồ thị của hàm số được vẽ theo 2 bước:

+ Tịnh tiến đồ thị của hàm số $y = f(x)$ qua bên phải 1 đơn vị.

+ Giữ nguyên phần bên phải, lấy đối xứng phần bên phải qua trục Oy .

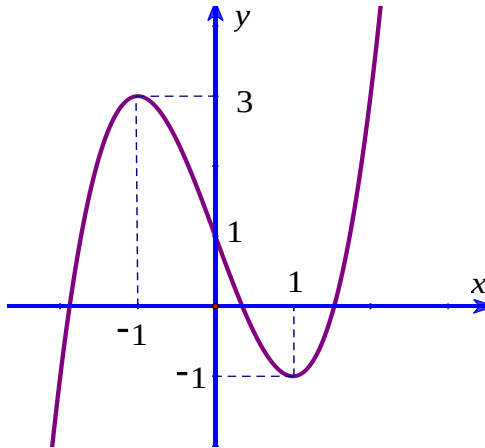


Từ đồ thị ta thấy: phương trình $f(|x| - 1) = m$ có 4 nghiệm phân biệt khi $-3 < m < 1$.

Vậy có 3 giá trị nguyên $m \in \{-2, -1, 0\}$



- Câu 33.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(\cos x) = -2m + 1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là

A. $(-1; 1]$.**B. $(0; 1)$.**C. $(-1; 1)$.D. $(0; 1]$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \cos x$. Khi đó: $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $t \in (0; 1)$.

Bài toán trở thành: Tìm m để phương trình $f(t) = -2m + 1$ có nghiệm $t \in (0; 1)$ hay phương trình $f(x) = -2m + 1$ có nghiệm $x \in (0; 1)$.

Từ đồ thị ta thấy điều kiện bài toán tương đương $-1 < -2m + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

- Câu 34.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(2\sin x + 1) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{6}\right)$ là:

A. $-2; 0$.B. $0; 2$.C. $-2; 2$.D. $-2; 0$.

Lời giải

Chọn A

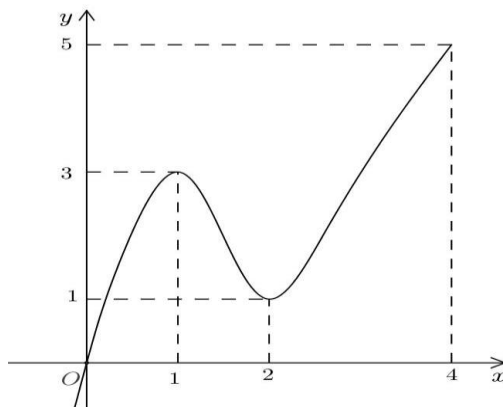
Đặt $t = 2\sin x + 1$

Ta có: $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 \leq \sin x < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 \leq 2\sin x < 1 \Rightarrow 1 \leq 2\sin x + 1 < 2 \Rightarrow 1 \leq t < 2$

$\Rightarrow -2 < f(t) \leq 0$. Vậy **chọn A**.

- Câu 35.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left[4(\sin^4 x + \cos^4 x)\right] = m$ có nghiệm?



A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

$$f\left[4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)\right] = m \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) = 4\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) = 3 + \cos 4x. \text{ Do đó } t \in [2; 4].$$

Dựa vào đồ thị ta thấy $\forall t \in [2; 4]$ thì $1 \leq f(t) \leq 5$.

Suy ra phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 1 \leq m \leq 5 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m .

Câu 36. Cho đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3mx^2 - m - 6$ (m là tham số) cắt trục hoành tại đúng một điểm khi giá trị của m là

A. $m = 0$.

B. $-6 < m < 2$.

C. $0 \leq m < 2$.

D. $-6 < m \leq 0$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3mx^2 - m - 6$ với trục hoành: $2x^3 + 3mx^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow m(1 - 3x^2) = 2x^3 - 6$. Nhận thấy $x^2 = \frac{1}{3}$ không phải là

nghiệm của phương trình với mọi m nên $m(1 - 3x^2) = 2x^3 - 6 \Leftrightarrow m = \frac{2x^3 - 6}{1 - 3x^2}$.

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{2x^3 - 6}{-3x^2 + 1}.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{-6x^4 + 6x^2 - 36x}{(1 - 3x^2)^2} = \frac{-6x(x + 2)(x^2 - 2x + 3)}{(1 - 3x^2)^2}$$

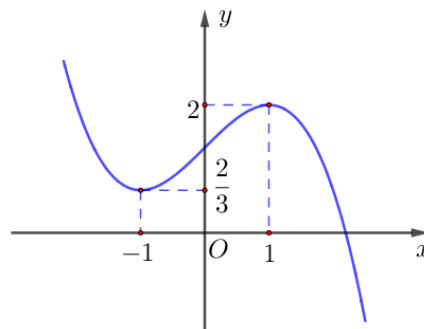
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{2x^3 - 6}{-3x^2 + 1}$:

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$	$ $	$+\infty$	$+$	0	$-$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số suy ra: $-6 < m < 2$.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x^2 - 4x + 5) + 1 = m$ có nghiệm là

A. 3.

B. 4.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

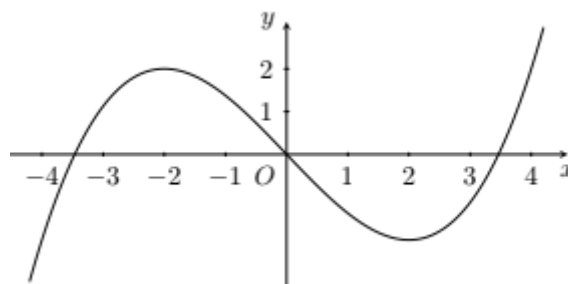
Để phương trình $x^2 - 4x + 5 = k \Leftrightarrow (x-2)^2 = k-1$ có nghiệm thì $k \geq 1$.

Do đó để $f(x^2 - 4x + 5) + 1 = m \Leftrightarrow f(x^2 - 4x + 5) = m-1$ có nghiệm thì đường thẳng $y = m-1$ phải cắt đồ thị $y = f(x)$ tại những điểm có hoành độ lớn hơn hoặc bằng 1.

Dựa vào đồ thị ta thấy $m-1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 3$. Mà m nguyên dương.

Vậy $m \in \{1; 2; 3\}$. Có tất cả 3 giá trị.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ của phương trình $f(2\sin x + 2) = 1$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

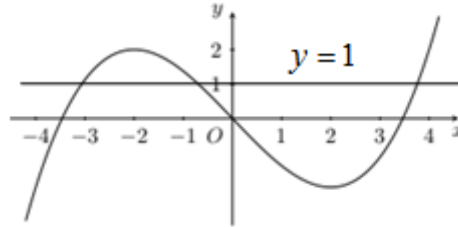
Đặt $t = 2\sin x + 2$.

Khi $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ thì $t \in [1; 4]$.

Với mỗi giá trị $t \in [1; 3) \cup \{4\}$ thì tương ứng với một giá trị $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Với mỗi giá trị $t \in [3; 4)$ thì tương ứng với hai giá trị $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

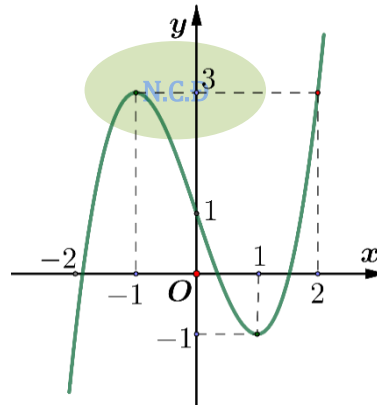
Xét phương trình $f(t) = 1$.



Từ đồ thị ta thấy phương trình $f(t) = 1$ có một nghiệm t thỏa mãn $t \in [3; 4)$.

Suy ra phương trình $f(2\sin x + 2) = 1$ có 2 nghiệm.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(\sqrt{4-x^2}) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[-\sqrt{2}; \sqrt{3})$ là

A. $(-1; 3]$.

B. $(-1; f(\sqrt{2})]$.

C. $[-1; 3]$.

D. $[-1; f(\sqrt{2})]$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow t' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}; t' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Với $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{3})$ ta có bảng biến thiên của hàm số $t = \sqrt{4-x^2}$.

x	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{3}$
t'	$+$	0	$-$
t	$\sqrt{2}$	2	1

Với $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{3}] \Rightarrow t \in (1; 2]$

Từ đồ thị ta có: $t \in (1; 2] \Rightarrow f(t) \in (-1; 3]$

Vậy để phương trình $f(\sqrt{4-x^2}) = m$ có nghiệm thì $m \in (-1; 3]$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$	-1	x_1	x_2	x_3	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$-$	$-$

Để phương trình $3f(2x-1) = m-2$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 1]$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -3)$

B. $(1; 6)$

C. $(6; +\infty)$

D. $(-3; 1)$

Lời giải

Chọn B

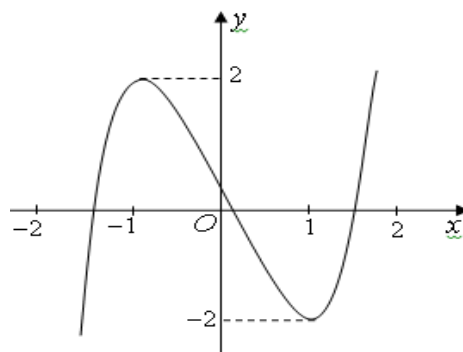
Đặt $t = 2x-1$. Ta thấy t là hàm đồng biến theo x và $x \in [0; 1] \Leftrightarrow t \in [-1; 1]$.

Do đó phương trình $3f(2x-1) = m-2$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 1] \Leftrightarrow f(t) = \frac{m-2}{3}$

có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-1; 1]$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\frac{m-2}{3} = 1 \Leftrightarrow m = 5$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ:





Phương trình $f(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3.

B. 7.

C. 9.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \in (-2; -1) & (1) \\ f(x) = b \in (0; 1) & (2) \\ f(x) = c \in (1; 2) & (3) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy: Mỗi phương trình (1), (2), (3) đều có 3 nghiệm phân biệt và các nghiệm này không trùng nhau.

Vậy phương trình $f(f(x)) = 0$ có 9 nghiệm thực.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(0) < \frac{7}{6}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{15}{13}$		$-\infty$
		1			

Giá trị lớn nhất của tham số m để phương trình $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) - \frac{1}{2}} = m$ có nghiệm trên đoạn $[0; 2]$ là

A. e^2 .B. $e^{\frac{15}{13}}$.C. e^4 .D. e^3 .

Lời giải

Chọn A

Phương trình

$$e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) - \frac{1}{2}} = m \Leftrightarrow 2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) - \frac{1}{2} = \ln m, \quad m > 0.$$

Đặt $t = f(x)$

Với $x \in [0; 2]$ và từ bảng biến thiên $\Rightarrow t \in [1; \max\{f(0), f(2)\}]$.

Vì $f(0) < \frac{7}{6}$, $f(2) < f(3) = \frac{15}{13} < \frac{7}{6}$ nên $\max\{f(0), f(2)\} = M < \frac{7}{6}$.

Do đó $t \in [1; M] \subset \left[1; \frac{7}{6}\right)$.

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của m để phương trình

$$\ln m = 2t^3 - \frac{13}{2}t^2 + 7t - \frac{1}{2} \quad (*) \text{ có nghiệm } t \in [1; M].$$

Xét hàm số $g(t) = 2t^3 - \frac{13}{2}t^2 + 7t - \frac{1}{2}$, $t \in [1; M]$.

$$g'(t) = 6t^2 - 13t + 7$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{7}{6} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

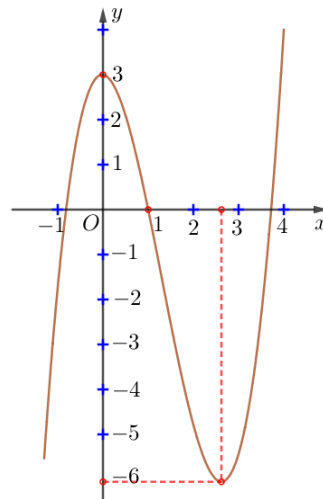
t	1		M	$\frac{7}{6}$	$+\infty$
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$		$g(1)$		$g\left(\frac{7}{6}\right)$	

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (*) có nghiệm $t \in [1; M] \Leftrightarrow g(M) \leq \ln m \leq g(1)$

$$\Rightarrow \max \ln m = \max_{[1; M]} g(t) = g(1) = 2 \Rightarrow \max m = e^2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của m để phương trình cho có nghiệm $x \in [0; 2]$ là e^2 .

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A. 2.

B. 8.

C. 4.

D. 6.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Ta có: } g'(x) = f'(x) f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} (*).$$

Theo đồ thị hàm số suy ra.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a_1 \end{cases}, \text{ với } 2 < a_1 < 3.$$

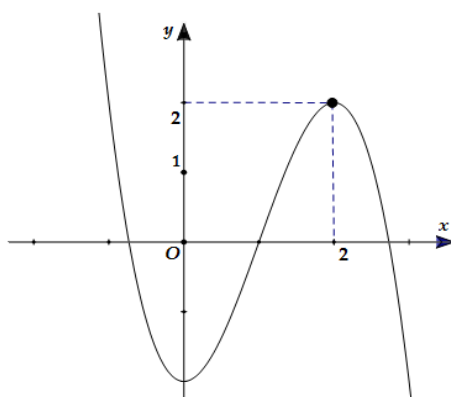
$$f[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, (1) \\ f(x) = a_1, (2) \end{cases}.$$

Phương trình (1): $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình (*).

Phương trình (2): $f(x) = a_1$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình (1) và phương trình (*).

Vậy phương trình ban đầu có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 44. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm của phương trình $|x^3 - 3x^2 + 2| = 1$ là

A. 3.

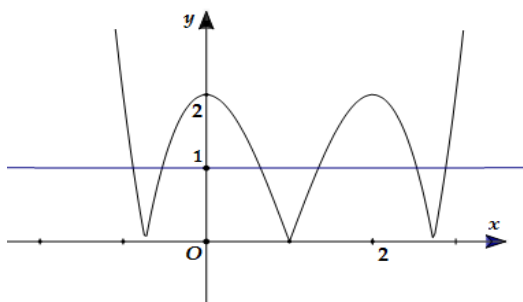
B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn C



Cách 1: Ta có $|x^3 - 3x^2 + 2| = 1 \Leftrightarrow |-x^3 + 3x^2 - 2| = 1.$

Ta vẽ đồ thị của hàm số $y = |-x^3 + 3x^2 - 2|$ bằng cách lấy phần đồ thị phía dưới trục Ox của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ đối xứng lên qua trục Ox kết hợp với phần đồ thị phía trên trục Ox của $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. Cụ thể ta được đồ thị như hình trên. Từ đây ta thấy phương trình $|-x^3 + 3x^2 - 2| = 1$ có 6 nghiệm phân biệt.

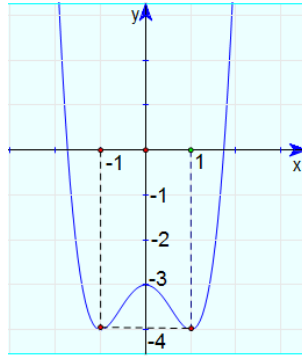
Cách 2:

$$\text{Ta có } |x^3 - 3x^2 + 2| = 1 \Leftrightarrow |-x^3 + 3x^2 - 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3 + 3x^2 - 2 = 1 & (1) \\ -x^3 + 3x^2 - 2 = -1 & (2) \end{cases}.$$



Dựa và đồ thị đã cho, nhận thấy, mỗi phương trình (1) và (2) đều có 3 nghiệm phân biệt khác nhau nên phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 45. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 2m - 4$ có hai nghiệm phân biệt?



A. $m \leq \frac{1}{2}$.

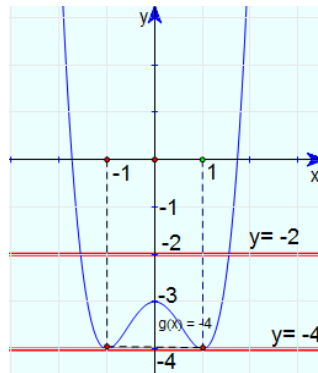
B. $\begin{cases} m < 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$.

C. $0 < m < \frac{1}{2}$.

D. $\begin{cases} m = 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$.

Lời giải

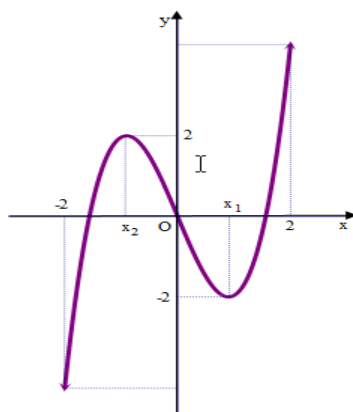
Chọn D



Phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 2m - 4$ có hai nghiệm phân biệt khi chỉ khi đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ và đường thẳng $y = 2m - 4$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Dựa vào đồ thị hàm số trên, yêu cầu bài toán thỏa mãn khi $\begin{cases} 2m - 4 = -4 \\ 2m - 4 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $|f(x) - 1| = 2$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2; 2]$.



A. 2.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

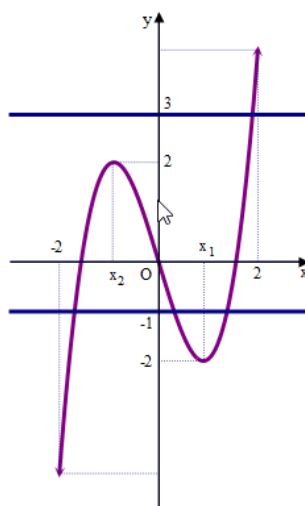
$$\text{Ta có: } |f(x) - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = 2 \\ f(x) - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3 & (1) \\ f(x) = -1 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = 3$.

Phương trình (2) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = -1$.

N.C.Đ

Quan sát hình vẽ:



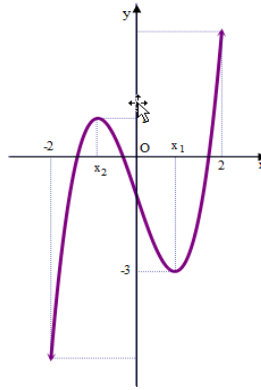
Qua đồ thị ta thấy:

- ☐ Phương trình (1) có nghiệm duy nhất;
- ☐ Phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt không trùng nghiệm phương trình (1).

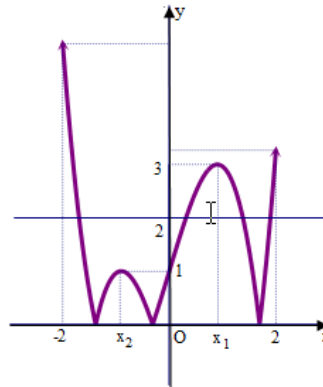
Vậy phương trình $|f(x) - 1| = 2$ có 4 nghiệm phân biệt.

Cách 2: Xây dựng đồ thị của hàm số chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta dễ dàng suy ra đồ thị hàm số $y = f(x) - 1$ như hình vẽ:



Tiếp theo ta vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x) - 1|$:



Khi đó phương trình $|f(x) - 1| = 2$ chính là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x) - 1|$ và đường thẳng $y = 2$.

Qua đồ thị ta thấy đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = |f(x) - 1|$ tại 4 điểm phân biệt.

Vậy phương trình $|f(x) - 1| = 2$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phân tích bài toán:

- Đây là một câu ở mức độ vận dụng thấp. Là bài toán tương giao khá cơ bản trong lớp các bài toán tương giao đồ thị.

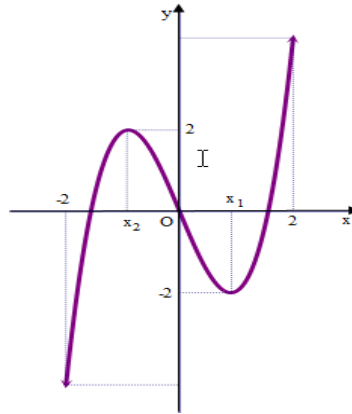
- Vấn đề làm khó học sinh ở đây chỉ là phương án xử lý phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.

- Đối với bài toán cụ thể trên, xử dụng **Cách 1** để giải là phương án hợp lý và tiết kiệm thời gian và xử dụng ít kỹ thuật.

- Vậy tại sao tôi đưa ra **Cách 2**? Vừa dùng nhiều kỹ năng vừa mất thời gian. Giả sử giả thiết bài toán không đổi nhưng yêu cầu bài toán tìm số nghiệm của một trong các phương trình sau thì học sinh chắc chắn sẽ gặp không ít khó khăn: $f(|x|) = -1$,

$$|f(|x|) - 1| = 2, |f(x) - 1| = 2 - x; \dots$$

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(|x|) = -1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2; 2]$.



A. 2.

B. 5.

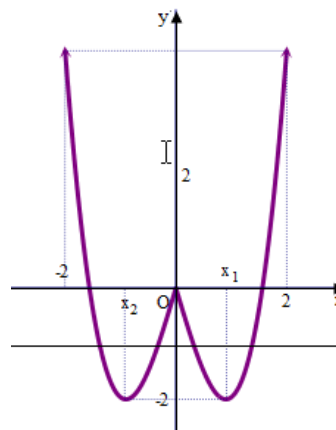
C. 4.

D. 3.

Lời giải

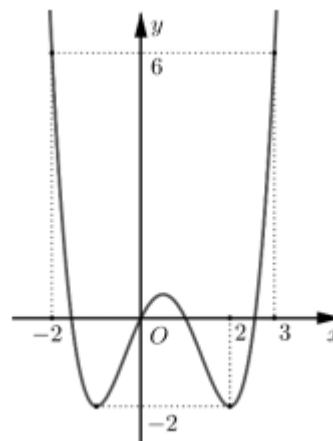
Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như sau:



Qua đồ thị ta thấy phương trình $f(|x|) = -1$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



A. 3.

B. 2.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x^3 - 3x$, xét hàm số $t = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $t' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t=2 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $t = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-1; 2]$.

x	-1	1	2
t'	-	0	+
t	2	-2	2

Từ đó bảng biến thiên trên ta thấy:

+) Nếu $t = -2$ thì $x = 1 \in [-1; 2]$.

+) Nếu $t \in (-2; 2]$ thì có hai nghiệm phân biệt $x \in [-1; 2]$.

Do đó phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm x phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$ khi phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm t phân biệt thuộc khoảng $(-2; 2]$ (*).

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ đã cho và m là số nguyên ta thấy $m = 0$ hoặc $m = -1$ thỏa mãn (*).

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán tổng quát:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho trước là (C) (hoặc cho trước bảng biến thiên). Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $f[n.g(x) + p] = h(m)$ trên tập D cho trước ($D \subseteq \mathbb{R}$); trong đó n, p là các số thực; $h(m)$ là biểu thức với tham số m .

Cách giải:

Bước 1: Đặt $t = n.g(x) + p$. Khi đó $f[n.g(x) + p] = h(m) \Rightarrow f(t) = h(m)$.

Bước 2:

+) Tìm miền giá trị D' của t ứng với $x \in D$.

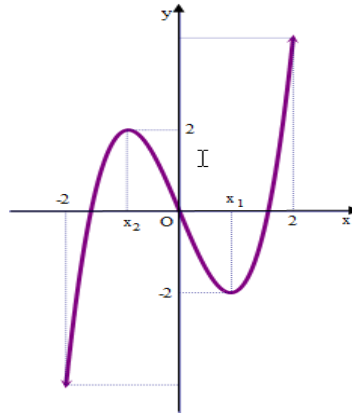
+) Chỉ ra mối quan hệ giá trị tương ứng giữa $t \in D'$ và $x \in D$.

Bước 3: Dựa vào đồ thị (C) (hoặc bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$), biện luận theo m số nghiệm $t \in D'$ của phương trình $f(t) = h(m)$.

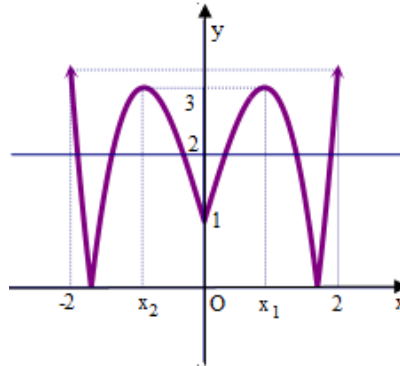
Bước 4: Dựa vào mối quan hệ giữa x và t ở Bước 2 ta có biện luận số nghiệm $x \in D$ của phương trình $f[n.g(x) + p] = h(m)$.



- Câu 49.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $|f(|x|) - 1| = 2$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2; 2]$.

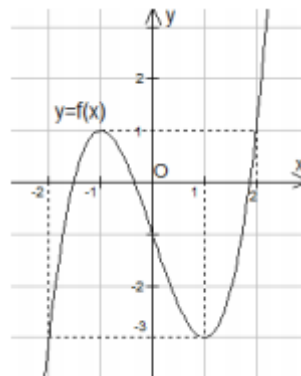
**A. 6.****B. 5.****C. 4.****D. 3.****Lời giải****Chọn A**

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = |f(|x|) - 1|$ như sau:



Qua đồ thị ta thấy phương trình $|f(|x|) - 1| = 2$ có 6 nghiệm phân biệt.

- Câu 50.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(2\sin x) = m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ khi và chỉ khi

**A. $m \in \{-3; 1\}$.****B. $m \in (-3; 1)$.****C. $m \in [-3; 1)$.****D. $m \in (-3; 1]$.****Lời giải****Chọn A**

Đặt $t = 2\sin x \Leftrightarrow \sin x = \frac{t}{2}$.

Với $x \in [-\pi; \pi]$ thì $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow t \in [-2; 2]$.

+) Với $t = 2$ thì có 1 nghiệm x thuộc $[-\pi; \pi]$ là $x = \frac{\pi}{2}$.

+) Với $t = -2$ thì có 1 nghiệm x thuộc $[-\pi; \pi]$ là $x = -\frac{\pi}{2}$.

+) Với $t = 0$ thì có 3 nghiệm x thuộc $[-\pi; \pi]$ là $x \in \{0; \pm\pi\}$.

+) Với $t \in (-2; 2) \setminus \{0\}$ thì có 2 nghiệm phân biệt x thuộc $[-\pi; \pi]$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đã cho, để phương trình $f(2\sin x) = m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ thì phương trình $f(t) = m(*)$ trên $[-2; 2]$ xảy ra các trường hợp sau:

TH1: $m = 1$ thì $(*)$ có hai nghiệm là $t \in \{-1; 2\}$ nên thỏa mãn yêu cầu.

TH2: $m = -3$ thì $(*)$ có hai nghiệm là $t \in \{1; -2\}$ nên thỏa mãn yêu cầu.

Vậy $m \in \{-3; 1\}$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $|f(x) - 1| = 2 - x$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2; 2]$.

A. 2.

B. 5.

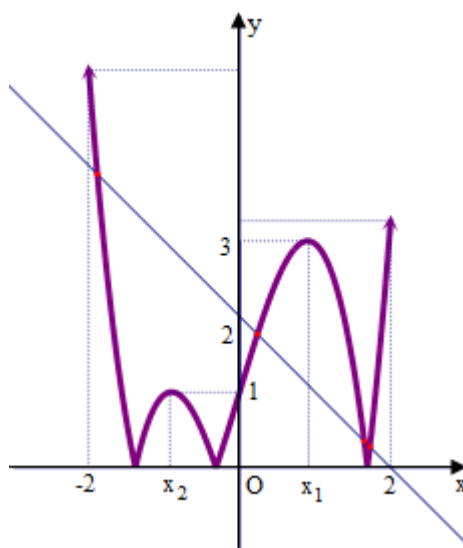
C. 4.

D. 3.

Lời giải

Phương trình $|f(x) - 1| = 2 - x$ chính là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x) - 1|$ và đường thẳng $y = 2 - x$.

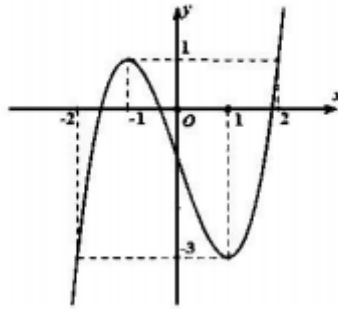
Ta có đồ thị như sau:



Qua đồ thị ta thấy phương trình $|f(x) - 1| = 2 - x$ có 4 nghiệm phân biệt.



Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 4.

Lời giải**Chọn C**

Đặt $t = f(x) - 1 \Leftrightarrow f(x) = t + 1$.

Từ đồ thị của hàm số đã cho, phương trình $f(t) = 0$ có ba nghiệm phân biệt: $t_1 \in (-2; -1)$, $t_2 \in (-1; 0)$, $t_3 \in (1; 2)$.

+) Với $t_1 \in (-2; -1) \Rightarrow -1 < t_1 + 1 < 0$, dựa vào đồ thị đã cho phương trình $f(x) = t_1 + 1$ có 3 nghiệm thực x phân biệt.

N.C.Đ

+) Với $t_2 \in (-1; 0) \Rightarrow 0 < t_2 + 1 < 1$, dựa vào đồ thị đã cho phương trình $f(x) = t_2 + 1$ có 3 nghiệm thực x phân biệt.

+) Với $t_3 \in (1; 2) \Rightarrow 2 < t_3 + 1 < 3$, dựa vào đồ thị đã cho phương trình $f(x) = t_3 + 1$ có 1 nghiệm x .

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm thực phân biệt.



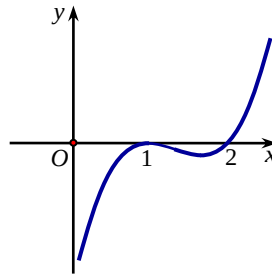
ĐỀ ÔN TẬP TỔNG HỢP
VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

ĐỀ SỐ 1

Câu 1: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ là điểm ?

- A. $Q(3; 1)$. B. $M(1; 3)$. C. $P(7; -1)$. D. $N(-1; 7)$.

Câu 2: Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(2; +\infty)$. B. $(1; 2)$. C. $(0; 1)$. D. $(0; 1)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	$+$		$-$ 0 $+$	
y	$-\infty$	2	$+\infty$ -4 $+\infty$	

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt

- A. $(-4; 2)$. B. $[-4; 2)$. C. $(-4; 2]$. D. $(-\infty; 2]$.

Câu 4: Đường thẳng $y = 2x - 1$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

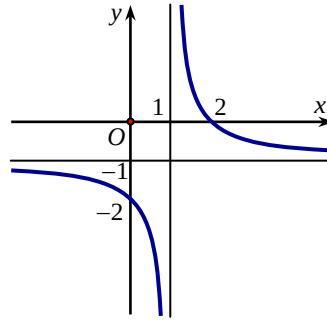
Câu 5: Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng.

- A. $\frac{52}{3}$. B. 20. C. 6. D. $\frac{65}{3}$.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị $A(1; -7)$, $B(2; -8)$. Tính $y(-1)$?

- A. $y(-1) = 7$. B. $y(-1) = 11$ C. $y(-1) = -11$ D. $y(-1) = -35$

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{ax - b}{x - 1}$ có đồ thị như hình dưới.



Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $b < 0 < a$. B. $0 < b < a$. C. $b < a < 0$. D. $0 < a < b$.

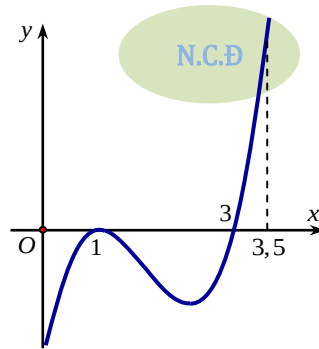
Câu 8: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2; -2)$. Khi đó $a + b$ bằng

- A. 4. B. 2. C. -4. D. -2.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

- A. $m \leq \frac{4}{3}$. B. $m \leq \frac{1}{3}$. C. $m \geq \frac{1}{3}$. D. $m \geq \frac{4}{3}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

- A. $x_0 = 2$. B. $x_0 = 1$. C. $x_0 = 0$. D. $x_0 = 3$.

Câu 11: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m_0 \in (-1; 7)$. B. $m_0 \in (7; 10)$. C. $m_0 \in (-15; -7)$. D. $m_0 \in (-7; -1)$.

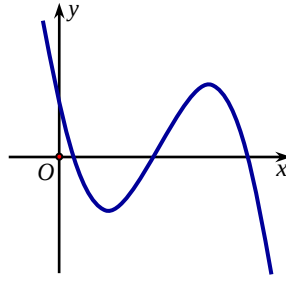
Câu 12: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sin x}{x^3 - 4x}$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 13: Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

- A. $S = [-1; 0]$ B. $S = \emptyset$. C. $S = \{-1\}$. D. $S = [0; 1]$.

Câu 14: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

Câu 15: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4x-3}{2x+1}$ cùng với 2 tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích bằng:

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 + (m+2)x^2 + (m^2 - m - 3)x - m^2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp chúng bằng 1?

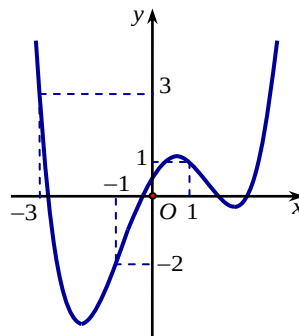
A. 1.

B. 2.

~~N.C.~~ C. 3.

D. 4.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$

C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$

D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m(x-4)$ cắt đồ thị của hàm số $y = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$ tại bốn điểm phân biệt?

A. 1.

B. 5.

C. 3.

D. 7.

Câu 20: Hàm số $y = (x+m)^3 + (x+n)^3 - x^3$ (tham số $m; n$) đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(m^2 + n^2) - m - n$ bằng

A. -16.

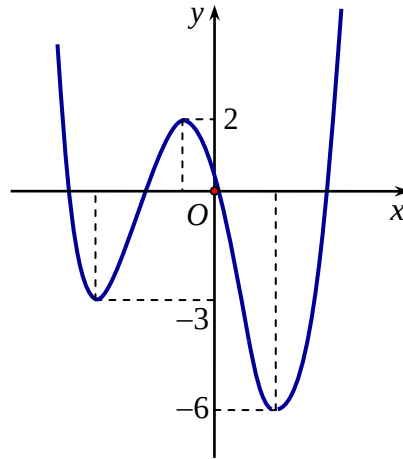
B. 4.

C. $-\frac{1}{16}$.

D. $\frac{1}{4}$.



Câu 21: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

- A. 12. B. 15. C. 18. D. 9.

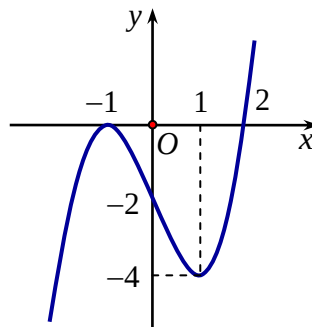
Câu 22: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- A. $m > -3$. B. $m \leq 0$. C. $m \leq -3$. D. $m > 0$.

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - ax^2 - 3ax + 4$. Để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1^2 + 2ax_2 + 9a}{a^2} + \frac{a^2}{x_2^2 + 2ax_1 + 9a} = 2$ thì a thuộc khoảng nào?

- A. $a \in \left(-3; -\frac{5}{2}\right)$. B. $a \in \left(-5; -\frac{7}{2}\right)$. C. $a \in (-2; -1)$. D. $a \in \left(-\frac{7}{2}; -3\right)$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?



- A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
 B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
 C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
 D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.



Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$. Số các giá trị tham số m để đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 - 3y = 4$ là

A. 1 .

B. 0 .

C. 3.

D. 2 .

N.C.Đ



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ là điểm ?

- A. $Q(3; 1)$. **B. $M(1; 3)$.** C. $P(7; -1)$. D. $N(-1; 7)$.

Lời giải

Chọn B

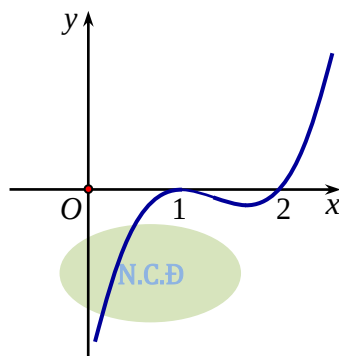
Ta có $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'' = 6x$.

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y''(1) = 6 > 0 \\ x = -1 \Rightarrow y''(-1) = -6 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Với $x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ là $M(1; 3)$.

Câu 2: Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(2; +\infty)$. B. $(1; 2)$. C. $(0; 1)$. **D. $(0; 1)$ và $(2; +\infty)$.**

Lời giải.

Chọn A

Dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x) > 0$ khi $x \in (2; +\infty) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$		$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	-4	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt

- A. $(-4; 2)$.** B. $[-4; 2)$. C. $(-4; 2]$. D. $(-\infty; 2]$.

Lời giải.

Chọn A

Số nghiệm phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của hai đường $y = f(x)$ và $y = m$: là đường thẳng song song với trục Ox cắt Oy tại điểm có tung độ m .

Phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên có $m \in (-4; 2)$.

- Câu 4:** Đường thẳng $y = 2x - 1$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.
- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $d: y = 2x - 1$ và đồ thị

$$(C): y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$$

$$\frac{x^2 - x - 1}{x + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - x - 1 = (2x - 1)(x + 1) \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện } x \neq -1)$$

Suy ra d và (C) có hai điểm chung.

- Câu 5:** Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng.
- A. $\frac{52}{3}$. B. 20. C. 6. D. $\frac{65}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [1; 3] \\ x = -2 \notin [1; 3] \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } f(1) = 5; f(2) = 4; f(3) = \frac{13}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max_{[1;3]} y = 5; \min_{[1;3]} y = 4 \Rightarrow \max_{[1;3]} y \cdot \min_{[1;3]} y = 20$$

- Câu 6:** Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị $A(1; -7)$, $B(2; -8)$. Tính $y(-1)$?
- A. $y(-1) = 7$. B. $y(-1) = 11$ C. $y(-1) = -11$ D. $y(-1) = -35$

Lời giải

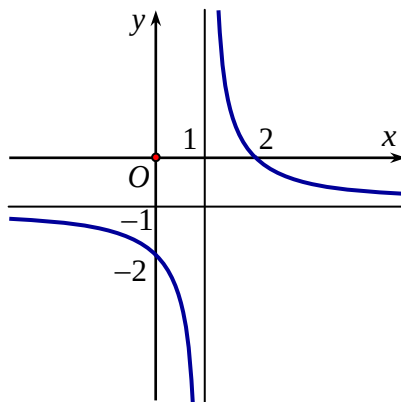
Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Theo bài cho ta có:
$$\begin{cases} 3a+2b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \\ a+b+c+d=-7 \\ 8a+4b+2c+d=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \\ 7a+3b+c=-1 \\ d=-7-a-b-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-9 \\ c=12 \\ d=-12 \end{cases}$$

Suy ra: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 12$. Do đó, $y(-1) = -35$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình dưới.



Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A.** $b < 0 < a$. **B.** $0 < b < a$. **C.** $b < a < 0$. **D.** $0 < a < b$.

Lời giải

N.C.Đ

Chọn C

Nhìn vào đồ thị ta thấy : Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = a$ và tiệm cận đứng $x = 1$

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = \frac{b}{a} > 1$. Ta có :
$$\begin{cases} \frac{a}{-1} = 1 \\ \frac{b}{a} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow b < a = -1 < 0.$$

Câu 8: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2; -2)$. Khi đó $a + b$ bằng

- A.** 4. **B.** 2. **C.** -4. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 2a$; $y'' = 6x - 6$

Để đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(2; -2)$ cần có:

$$\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ 6 \cdot 2 - 6 > 0 \\ 4a + b - 4 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}. \text{Vậy } a + b = 2.$$

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

- A.** $m \leq \frac{4}{3}$. **B.** $m \leq \frac{1}{3}$. **C.** $m \geq \frac{1}{3}$. **D.** $m \geq \frac{4}{3}$.

Lời giải

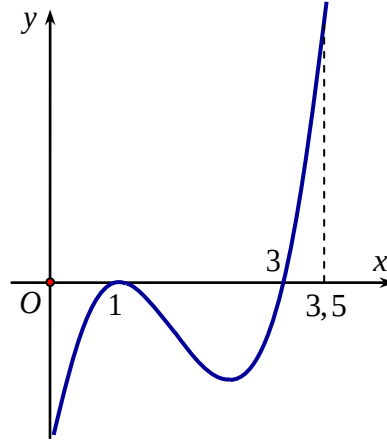
Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 + 2x + m.$$

Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = 1 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

A. $x_0 = 2$.

B. $x_0 = 1$.

C. $x_0 = 0$.

D. $x_0 = 3$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta có bảng biến thiên:

x	0	1		3		3,5
y'		-	0	-	0	+
y						

Suy ra $\min_{\left[0; \frac{7}{2}\right]} y = f(3)$. Vậy $x_0 = 3$.

Câu 11: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0 \in (-1; 7)$.

B. $m_0 \in (7; 10)$.

C. $m_0 \in (-15; -7)$.

D. $m_0 \in (-7; -1)$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 6x + m.$$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0; \Delta' = 9 - 3m.$$



Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Hai điểm cực trị $x_1; x_2$ là nghiệm của $y' = 0$ nên: $x_1 + x_2 = 2; x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3}$.

$$\text{Để } x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 13$$

$$\Leftrightarrow 4 - m = 13 \Leftrightarrow m = -9. \text{ Vậy } m_0 = -9 \in (-15; -7).$$

Câu 12: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sin x}{x^3 - 4x}$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{0; -2; 2\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \right) \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right] = \frac{0^2 - 3 \cdot 0 + 2}{0^2 - 4} \cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} y &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{(x^2 - 3x + 2)\sin x}{x(x^2 - 4)} \right] = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{(x-1)(x-2)\sin x}{x(x-2)} \cdot \frac{1}{(x+2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{(x-1)\sin x}{x} \cdot \frac{1}{(x+2)} \right] \end{aligned}$$

$$\text{o Vì } \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{(x-1)\sin x}{x} \right] = -\frac{3\sin 2}{2} < 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{(x+2)} = +\infty \text{ nên } \lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty$$

$$\text{o Vì } \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[\frac{(x-1)\sin x}{x} \right] = -\frac{3\sin 2}{2} < 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty \text{ nên } \lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$$

Vậy đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)\sin x}{x(x+2)} = \frac{\sin 2}{6}.$$

Vậy ĐTHS có 1 đường tiệm cận đứng.

Câu 13: Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

A. $S = [-1; 0]$

B. $S = \emptyset$.

C. $S = \{-1\}$.

D. $S = [0; 1]$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m)$$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases} \forall m$$

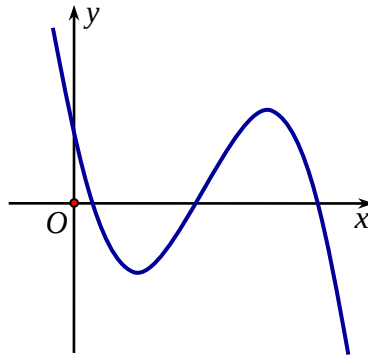
Hàm số luôn nghịch biến trong khoảng $(m; m+2) \forall m$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ thì $(-1; 1) \subset (m; m+2)$.



$$\text{Nghĩa là : } m \leq -1 < 1 \leq m+2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ -1 < 1 \\ 1 \leq m+2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 14: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

Lời giải

Chọn A

Do đồ thị ở nhánh phải đi xuống nên $a < 0$. Loại phương án **B**.

Do hai điểm cực trị dương nên $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow ab < 0$ và $a < 0 \Rightarrow b > 0$. Loại **C**.

$x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c < 0$. Loại phương án **D**

Câu 15: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4x-3}{2x+1}$ cùng với 2 tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích bằng:

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm nằm trên đồ thị hàm số, $x_0 \neq -\frac{1}{2}$.

$$y' = \frac{10}{(2x+1)^2}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại } M : y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = \frac{10}{(2x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{4x_0-3}{2x_0+1}$$

Tiệm cận đứng: $x = -\frac{1}{2}$, tiệm cận ngang: $y = 2$

Gọi A là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng $\Rightarrow x_A = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow y_A = \frac{10}{(2x_0+1)^2} \left(-\frac{1}{2} - x_0 \right) + \frac{4x_0-3}{2x_0+1} = \frac{4x_0-8}{2x_0+1}. \text{ Vậy } A \left(-\frac{1}{2}; \frac{4x_0-8}{2x_0+1} \right)$$

Gọi B là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận ngang $\Rightarrow y_B = 2$

$$\Rightarrow 2 = \frac{10}{(2x_0+1)^2}(x_B - x_0) + \frac{4x_0-3}{2x_0+1} \Rightarrow x_B = 2x_0 + \frac{1}{2}. \text{ Vậy } B\left(\frac{4x_0+1}{2}; 2\right)$$

Giao điểm 2 tiệm cận là $I\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IA} = \left(0; -\frac{10}{2x_0+1}\right) \Rightarrow IA = \left|\frac{10}{2x_0+1}\right|$$

$$\overrightarrow{IB} = (2x_0+1; 0) \Rightarrow IB = |2x_0+1|$$

$$\text{Tam giác } IAB \text{ vuông tại } I \text{ nên } S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{1}{2} \left|\frac{10}{2x_0+1}\right| \cdot |2x_0+1| = 5.$$

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 + (m+2)x^2 + (m^2-m-3)x - m^2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành:

$$x^3 + (m+2)x^2 + (m^2-m-3)x - m^2 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + (m+3)x + m^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 + (m+3)x + m^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ pt (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ pt (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ 1+m+3+m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3m^2 + 6m + 9 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3$$

Các giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán là: 0, 1, 2.

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp chúng bằng 1?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases} \quad (m > 0)$$

Tọa độ ba điểm cực trị: $A(0; m-1)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2+m-1)$, $C(\sqrt{m}; -m^2+m-1)$.

Gọi H là trung điểm của cạnh BC . Ta có $H(0; -m^2+m-1)$

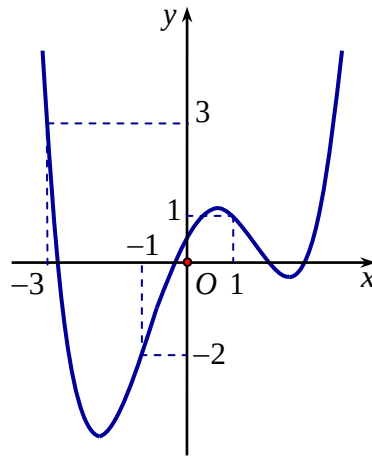
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \quad (\text{do } \triangle ABC \text{ cân tại } A).$$



$$\Leftrightarrow AB^2 = 2AH.R \text{ trong đó } \begin{cases} AH = m^2 \\ AB = \sqrt{m + m^4} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } m + m^4 = 4m^4 \Leftrightarrow 3m^4 = m \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1).$

B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$

N.C.Đ

C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$

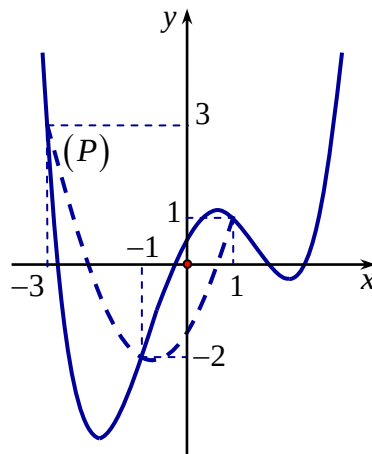
D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$\text{Căn cứ vào đồ thị } y = f'(x), \text{ ta có: } \begin{cases} f'(-1) = -2 \\ f'(1) = 1 \\ f'(-3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(-1) = 0 \\ g'(1) = 0 \\ g'(-3) = 0 \end{cases}$$



Ngoài ra, vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ bên (đường nét đứt), ta thấy (P) đi qua các điểm $(-3;3)$, $(-1;-2)$, $(1;1)$ với đỉnh $I\left(-\frac{3}{4}; -\frac{33}{16}\right)$. Rõ ràng

- o Trên khoảng $(-1;1)$ thì $f'(x) > x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, nên $g'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1;1)$
- o Trên khoảng $(-3;-1)$ thì $f'(x) < x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, nên $g'(x) < 0 \quad \forall x \in (-3;-1)$

Từ những nhận định trên, ta có bảng biến thiên của hàm $y = g'(x)$ trên $[-3;1]$ như sau:

x	-3	-1	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

Vậy $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m(x-4)$ cắt đồ thị của hàm số $y = (x^2-1)(x^2-9)$ tại bốn điểm phân biệt?

- A. 1. B. 5. C. 3. D. 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$(x^2-1)(x^2-9) = m(x-4) \Rightarrow \frac{(x^2-1)(x^2-9)}{(x-4)} = m \quad (1), \quad (x \neq 4).$$

Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-9)}{(x-4)}$ và

$$y = m.$$

Ta có:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-9)(x-4) + 2x(x^2-1)(x-4) - (x^2-9)(x^2-1)}{(x-4)^2} = \frac{3x^4 - 16x^3 - 10x^2 + 80x - 9}{(x-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^4 - 16x^3 - 10x^2 + 80x - 9 = 0$$

Giải phương trình bằng MTBT ta được 4 nghiệm $\begin{cases} x_1 \approx -2,169 \\ x_2 \approx 0,114 \\ x_3 \approx 2,45 \\ x_4 \approx 4,94 \end{cases}$. Các nghiệm này đã được

lưu chính xác ở trong bộ nhớ của MTBT.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	4	x_4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	2,58	-2,28	9,67	$-\infty$	383,5	$+\infty$

Từ BBT và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Câu 20: Hàm số $y = (x+m)^3 + (x+n)^3 - x^3$ (tham số $m; n$) đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(m^2 + n^2) - m - n$ bằng

A. -16.

B. 4.

C. $-\frac{1}{16}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3(x+m)^2 + 3(x+n)^2 - 3x^2 = 3[x^2 + 2(m+n)x + m^2 + n^2]$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow mn \leq 0$.

TH1: $mn = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \end{cases}$.

N.C.Đ

Do vai trò của m, n là như nhau nên ta chỉ cần xét trường hợp $m = 0$.

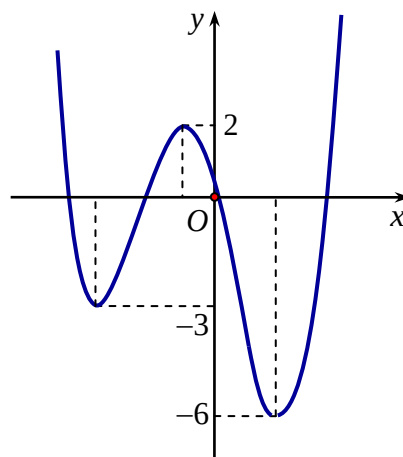
$\Rightarrow P = 4n^2 - n = \left(2n - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16} \quad (1)$.

TH2: $mn < 0 \Leftrightarrow m > 0; n < 0$ (do vai trò của m, n như nhau).

Ta có $P = \left(2m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + 4n^2 + (-n) > -\frac{1}{16} \quad (2)$.

Từ (1), (2) ta có $P_{\min} = -\frac{1}{16}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{8}; n = 0$ hoặc $m = 0; n = \frac{1}{8}$.

Câu 21: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 12.

B. 15.

C. 18.

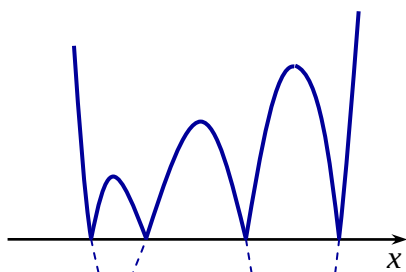
D. 9.

Lời giải

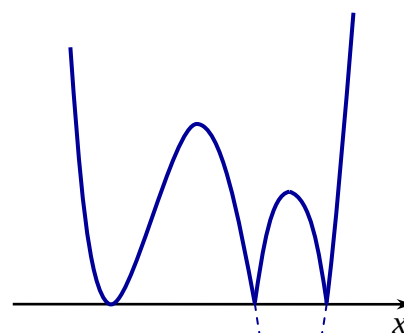
Chọn A

Nhận xét: Số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C'): y = f(x-1)$ với Ox .

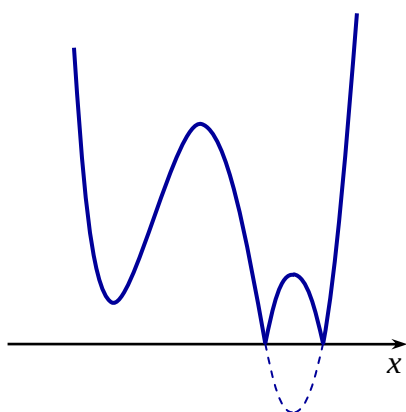
Vì $m > 0$ nên $(C''): y = f(x-1) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C'): y = f(x-1)$ lên trên m đơn vị.



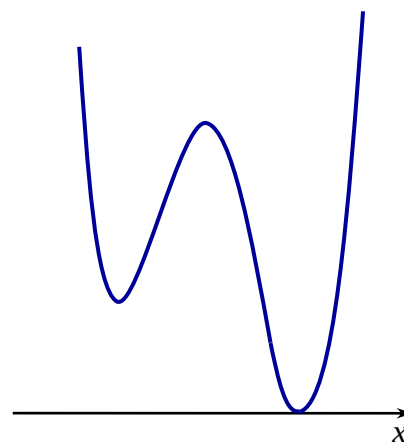
TH1: $0 < m < 3$



TH2: $m = 3$



TH3: $3 < m < 6$



TH4: $m \geq 6$

N.C.Đ

TH1: $0 < m < 3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.

TH2: $m = 3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH3: $3 < m < 6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH4: $m \geq 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $3 \leq m < 6$. Do $m \in \mathbb{Z}^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m > -3$.

B. $m \leq 0$.

C. $m \leq -3$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\sin x = t, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 6t - m$

Để hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; 1]$ cần:

$$f'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0; 1] \Leftrightarrow 3t^2 + 6t - m \geq 0 \quad \forall t \in [0; 1] \Leftrightarrow 3t^2 + 6t \geq m \quad \forall t \in [0; 1]$$

Xét hàm số $g(t) = 3t^2 + 6t$

$$g'(t) = 6t + 6$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Bảng biến thiên

t	0	1
$g'(t)$		+
$g(t)$	0	9

N.C.Đ

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy với $m \leq 0$ thì hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; 1]$, hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - ax^2 - 3ax + 4$. Để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{x_1^2 + 2ax_2 + 9a}{a^2} + \frac{a^2}{x_2^2 + 2ax_1 + 9a} = 2 \text{ thì } a \text{ thuộc khoảng nào ?}$$

A. $a \in \left(-3; -\frac{5}{2}\right)$. **B.** $a \in \left(-5; -\frac{7}{2}\right)$. **C.** $a \in (-2; -1)$. **D.** $a \in \left(-\frac{7}{2}; -3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đạo hàm : $y' = x^2 - 2ax - 3a, y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2ax - 3a = 0 \quad (1)$

Hàm số có hai cực trị x_1, x_2 khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow a < -3 \cup a > 0$.

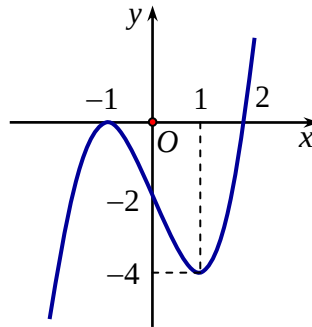
Khi đó x_1, x_2 là nghiệm pt (1), theo định lý Viet : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a \\ x_1 \cdot x_2 = -3a \end{cases}$.

Do đó : $\begin{cases} x_1^2 + 2ax_2 + 9a = x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 - 3x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 = 4a^2 + 12a \\ x_2^2 + 2ax_1 + 9a = x_2^2 + (x_1 + x_2)x_1 - 3x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 = 4a^2 + 12a \end{cases}$.

Theo đề bài, ta có : $\frac{4a+12}{a} + \frac{a}{4a+12} = 2 \Leftrightarrow \frac{4a+12}{a} = 1 \Leftrightarrow a = -4$.



Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?



- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ và $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Xét $g(x) = f(x^2 - 2)$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$. **N.C.Đ**

$g'(x) = 2xf'(t)$ với $t = x^2 - 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ t = x^2 - 2 = -1 \\ t = x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Có $f'(t) > 0 \Leftrightarrow t = x^2 - 2 > 2 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
y												

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-2; 0)$. Vậy C sai.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$. Số các giá trị tham số m để đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 - 3y = 4$ là

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D



Phương trình hoành độ giao điểm : $\frac{x+1}{x-2} = x+m \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - 2m - 1 = 0 (*)$

Theo yêu cầu bài toán : (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 4 + (m-3)2 - 2m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 2m + 13 > 0, \forall m$$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ suy ra G là trọng tâm của tam giác OAB :

$$G\left(\frac{x_1+x_2}{3}; \frac{y_1+y_2}{3}\right) = G\left(\frac{x_1+x_2}{3}; \frac{x_1+x_2+2m}{3}\right) = G\left(\frac{3-m}{3}; \frac{3-m+2m}{3}\right) = G\left(\frac{3-m}{3}; \frac{3+m}{3}\right)$$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán : } \left(\frac{3-m}{3}\right)^2 + \left(\frac{3+m}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{3+m}{3}\right) = 4 \Leftrightarrow 2m^2 - 9m - 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = \frac{15}{2} \end{cases}$$

N.C.Đ